

# Union des professeurs de physique et de chimie

## Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques

par Roger DUFFAIT  
Université Lyon-1  
duffait@ipnl.in2p3.fr

### RÉSUMÉ

Au moyen de divers capteurs de position (capteur magnétostrictif, barrette CCD, capteur de force), nous avons étudié divers oscillateurs mécaniques en translation et en rotation, avec ou sans amortissement, en oscillations libres et en oscillations forcées. Sont étudiés à la fois des oscillateurs harmoniques et des oscillateurs dans lesquels les termes non-linéaires conduisent à des oscillations anharmoniques ou à un comportement chaotique. Une étude quantitative précise est réalisée sur ces divers oscillateurs et en particulier sur les oscillateurs à plusieurs degrés de liberté. On termine par une comparaison avec ce que donne le logiciel de simulation Interactive Physics.

### 1. INTRODUCTION

L'étude des oscillateurs mécaniques permet de mettre en évidence, de manière concrète et visuelle, de nombreux phénomènes intéressants :

- ◆ Les oscillations libres permettent d'étudier les paramètres qui régissent la (pseudo) période et de caractériser les phénomènes d'amortissement fluide ou solide. Les études énergétiques visualisent l'échange entre les formes d'énergies cinétique et potentielle. Lorsqu'elles existent, les non-linéarités de l'équation différentielle qui régit le système peuvent être caractérisées par analyse harmonique ou par description dans le plan de phase.
- ◆ Les oscillations forcées permettent de donner naissance à des phénomènes de résonance et, plus généralement, de caractériser la nature du filtre que constitue l'oscillateur. Le lien avec l'étude en régime libre peut être établi. Le régime transitoire qui

précède l'établissement du régime permanent constitue une belle illustration de la résolution d'une équation différentielle avec second membre.

- ◆ L'étude des systèmes couplés à deux (ou plus) degrés de liberté constitue également une belle illustration des systèmes d'équations différentielles couplées et donne accès à des notions importantes comme l'existence de modes propres et les relations de dispersion.

Nous décrirons les différents dispositifs mécaniques utilisés en détaillant surtout des dispositifs que l'on ne trouve pas couramment dans les catalogues de matériel pédagogique mais qui donnent des résultats de grande qualité. Une place importante sera donnée aux dispositifs d'enregistrement en particulier à ceux utilisant les capteurs de déplacement magnétostrictifs et ceux utilisant une barrette de photodiodes.

Les enregistrements et les traitements des données seront effectués au moyen du logiciel Synchronie. Nous terminerons avec une comparaison des résultats expérimentaux avec ce que donne, dans quelques cas, le logiciel de simulation Interactive Physics.

## 2. DIFFÉRENTS OSCILLATEURS MÉCANIQUES

### 2.1. Oscillateurs à un degré de liberté

Dans le cas linéaire, ce sont des mouvements qui sont décrits par une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants du type :

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + Kx = F\sin\omega t$$

soit en coordonnées réduites :  $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m \sin \omega t$

Le deuxième membre de l'équation différentielle décrit l'excitation extérieure du système donc les oscillations forcées. En oscillations libres, ce deuxième membre est nul. Le tableau ci-dessous indique les termes correspondants pour les différents types d'oscillateurs envisagés ; la dernière colonne rappelle la situation du circuit RLC série.

	Pendule élastique	Pendule de torsion	Pendule pesant *	Circuit RLC
x	Position x	Angle $\theta$	Angle $\theta$	Charge q
m	Masse M	Moment d'inertie I	Moment d'inertie I	Inductance L
K	Raideur** K	Cte de torsion C	Mga	1/C
$\omega_0^2$	K/M	C/I	Mga/I	1/LC

(\*) Pour le pendule pesant, le couple de rappel est de la forme  $Mga \sin \theta$  ; à l'approximation des petites oscillations  $\sin \theta = \theta$ .

(\*\*) La raideur est notée K dans cet article pour la distinguer du nombre d'onde k

#### 2.1.1. Oscillateur élastique

- ◆ Masse M suspendue à un ressort de raideur K (oscillateur vertical : cf. figure 1a) : étude de la période propre d'oscillation (en réalité de la pseudo-période mais l'amortisse-

ment très faible permet de les confondre) avec un chronomètre et influence des paramètres  $M$  et  $K$  <sup>(1)</sup>.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$$

Pour réaliser un enregistrement, nous avons utilisé un capteur de force (basé sur une jauge de contrainte) : la force exercée à l'extrémité supérieure du ressort sur le capteur <sup>(2)</sup> auquel il est suspendu est proportionnelle à son allongement donc varie linéairement avec la position  $y(t)$ . Comme le capteur fournit une tension qui varie linéairement avec la force, la tension est une image (à un décalage près), de la position. Cette disposition présente l'intérêt d'avoir des frottements extrêmement faibles.

- ◆ Une variante consiste à réaliser un oscillateur horizontal en plaçant la masse entre deux ressorts (dans ce cas, la raideur équivalente est égale à la somme des raideurs des deux ressorts). Afin de diminuer autant que possible les frottements, cette expérience se réalise sur coussin d'air avec une table à mobile autoporteurs ou, mieux, avec une table à digitaliser (cf. figure 1b).

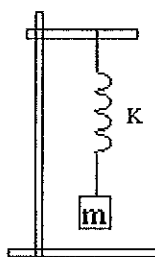


Figure 1a

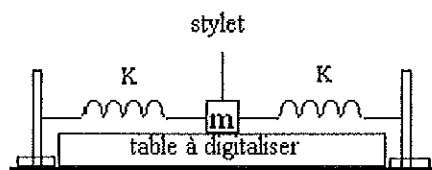


Figure 1b

L'intérêt de la table à digitaliser est de fournir l'enregistrement de la position  $x(t)$  en fonction du temps ce qui permet de vérifier le caractère oscillatoire sinusoïdal (plus ou moins amorti) et de calculer la vitesse afin de réaliser une étude énergétique ( $E_c = 1/2 M v^2$  et  $E_p = 1/2 K x^2$ ). Le résultat est rarement très satisfaisant : les frottements résiduels, l'influence du tuyau d'amenée de l'air comprimé au mobile ainsi que la précision limitée de pointage de la table font que le mouvement est approximativement sinusoïdal. Ce défaut est surtout gênant pour le calcul de la vitesse par dérivée de la position : la conservation (à l'amortissement près) de l'énergie mécanique est vraie en moyenne mais présente un « bruit » important. On peut, certes, améliorer un peu le résultat par lissage de  $x(t)$  avant dérivation. Une discussion intéressante de ces problèmes de dérivation numérique est traitée dans un article récent de G. BOUYRIE [1]. Mais si l'on veut obtenir des résultats de bonne qualité, le plus satisfaisant est d'améliorer à la fois le dispositif mécanique et le dispositif d'enregistrement (voir § 2.1.3.).

(1) En réalité, il faudrait tenir compte de la masse  $m_r$  du ressort et une meilleure approximation de la formule donnant la période serait de remplacer  $m$  par  $m + m_r/3$ .

(2) Un capteur de ce type de marque Vernier est commercialisé par Phylab et Maison des Enseignants de Provence.

**Remarques**

- ◆ La position du mobile peut aussi se mesurer avec un potentiomètre liquide [2, 3, 4].
- ◆ Un dispositif commercial (Jeulin) utilise ce type d'oscillateur, la détection de position s'effectuant par une plaque d'opacité variable passant dans une barrière lumineuse. La linéarité de la détection est convenable mais les frottements sont assez élevés (et le dispositif est très bruyant).

**2.1.2. Pendule pesant**

Notons d'abord que cet oscillateur n'est harmonique que pour les faibles oscillations. Dans ce dernier cas, la période est :

$$T = 2 \sqrt{\frac{I}{Mga}}$$

$I$  : moment d'inertie du pendule par rapport à son axe de rotation.

$M$  : sa masse.

$a$  : la distance entre l'axe de rotation et le centre d'inertie du pendule.

Dans le cas d'un pendule simple de longueur  $l$  (masse quasi ponctuelle au bout d'un fil), la période se ramène à :

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

On peut le réaliser avec, par exemple, une tige métallique tournant autour d'un axe. Afin de réduire les frottements sur l'axe, il est nécessaire d'utiliser un roulement à billes pour la rotation.

La détection de l'angle peut se faire avec un potentiomètre rotatif monté sur l'axe mais les frottements font qu'il est préférable d'utiliser un codeur optique avec éventuellement une électronique de comptage et un convertisseur numérique - analogique [5]. Si l'on veut étudier les oscillations à très grand angle, il faut prévoir un capteur sans butée. On peut aussi utiliser un potentiomètre liquide pour les faibles oscillations. Nous voudrions proposer ici un capteur de déplacement magnétostrictif d'utilisation très générale et qui peut convenir à la plupart des dispositifs. On trouvera en annexe 1 le principe de ce capteur.

Sur le plan pratique, la mise en œuvre de ce capteur (très utilisé dans l'industrie) est remarquablement simple : il suffit de fixer un aimant permanent (il peut être de petite dimension : nous avons utilisé celui fourni par le fabricant du capteur ou un petit aimant de fixation sur tableau magnétique) sur l'objet dont on veut enregistrer la position. On place le capteur au voisinage (1 à 2 mm) de l'aimant, sans contact et donc sans frottement.

Pour un pendule pesant dans le cadre des faibles oscillations, on peut placer l'aimant à l'extrémité du pendule (cf. figure 2a). En revanche, si l'on désire justement étudier les non-linéarités avec de très fortes oscillations (jusqu'à  $\pm 180^\circ$ ), on réalise la conversion angulaire-linéaire au moyen d'un fil s'enroulant autour d'un cylindre solidaire du pendule et centré sur l'axe (cf. figure 2b). L'aimant est fixé sur le fil.

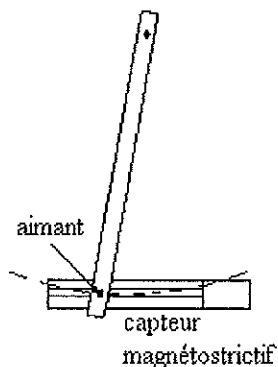


Figure 2a

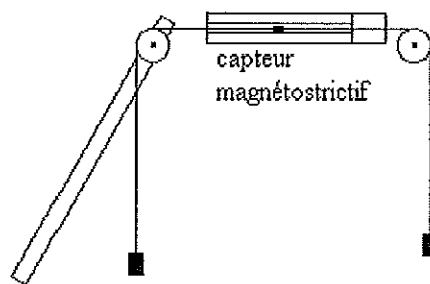


Figure 2b

### 2.1.3. Oscillateur mixte (élastique et pesant)

Afin de réduire les frottements résiduels du pendule élastique horizontal, il est intéressant de réaliser le dispositif de la figure 3. La force de rappel qui s'applique sur le solide de masse  $M$  (une plaque d'aluminium de 15 à 20 cm de côté et de 2 mm d'épaisseur) lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre de la grandeur  $x$ , est la somme de l'action des ressorts et de celle du pendule pesant.

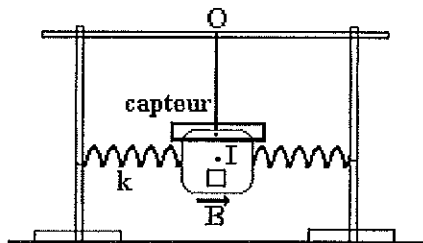


Figure 3

Dans le cas des faibles oscillations du pendule (lorsqu'on peut assimiler  $\sin \theta$  et  $\theta$ ), elle s'écrit donc :

$$F_r = 2 K x + Mg x / l$$

$K$  : raideur de chacun des ressorts.

$l$  : longueur du pendule simple synchrone du pendule.  $l$  est très voisin de la distance  $OI$  entre le point de fixation et le centre d'inertie du solide de masse  $m$ .

Numériquement, en prenant  $K = 15 \text{ N/m}$ ,  $M = 0,2 \text{ kg}$  et  $l = 50 \text{ cm}$ , le terme élastique est prépondérant (30 par rapport à 4). Les approximations sur le pendule pesant et l'approximation des petites oscillations (pratiquement  $\theta$  ne dépasse jamais  $5^\circ$ ) ont donc une influence tout à fait négligeable.

L'intérêt de cette disposition est aussi qu'il est facile d'introduire un amortissement

fluide en faisant passer la plaque d'aluminium dans l'entrefer d'un électroaimant [6]. Les courants de Foucault induits produisent un freinage proportionnel à la vitesse<sup>(3)</sup>. En agissant sur la valeur du champ magnétique, on peut contrôler le coefficient d'amortissement du pendule dans de grandes proportions. On peut même atteindre le cas du régime critique ( $\lambda = \omega_0$ ) et du régime aperiodique.

Pour étudier les oscillations forcées, il faut appliquer une force alternative sinusoïdale sur la masse. Une solution particulièrement commode et précise consiste à utiliser un moteur pas à pas (dont la vitesse de rotation est contrôlée par la fréquence d'un signal TTL délivré par un générateur BF). Sur l'axe de ce moteur, on fixe un disque sur lequel on peut placer une tige excentrée autour de laquelle s'accroche la boucle d'un fil. À l'autre extrémité du fil, on place un ressort  $R_1$ , de faible raideur  $K_c$ , dont l'autre extrémité est accrochée sur une spire d'un des ressorts de l'oscillateur, proche de l'extrémité fixe selon la figure 4.

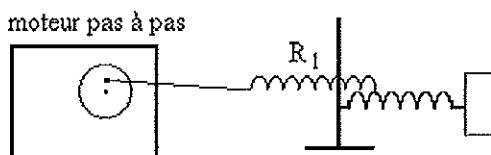


Figure 4

En annexe 2, on détaille le calcul montrant que cette façon de procéder modifie extrêmement peu la fréquence propre de l'oscillateur de départ (de l'ordre de 1 pour 1000) tout en réalisant bien l'excitation désirée. L'amplitude de l'excitation (l'analogue de l'amplitude du générateur excitant un circuit RLC) peut être modifiée :

- en changeant l'excentricité de la tige ;
- en changeant la spire sur laquelle on accroche le ressort  $R_1$  ;
- en changeant la raideur  $K_c$  de ce ressort.

En particulier, lorsque l'amortissement est très faible, la résonance est aiguë et l'amplitude de l'excitation doit être très faible également si l'on ne veut pas dépasser les amplitudes tolérables de l'oscillation.

*Remarque :* cette façon de procéder constitue une amélioration très sensible des dispositifs du commerce (Didalab, Pierron) dans lesquels il est justement difficile d'étudier les cas les plus spectaculaires (avec faible amortissement) !

#### 2.1.4. Pendule de torsion

Cette fois, c'est un mouvement de rotation d'un solide et le couple de rappel est produit par un fil de torsion ou, mieux, par un ressort spiral (voir remarque). C'est le cas

(3) C'est nettement préférable au freinage introduit par une palette se déplaçant dans un liquide qui, contrairement à ce que l'on pourrait croire, ne fournit pas un frottement de type fluide c'est-à-dire proportionnel à la vitesse (sauf en régime laminaire).

du pendule de Pohl proposé par différents constructeurs (Leybold, Didalab). Comme le pendule élastique rectiligne, il est strictement harmonique (tant qu'on ne dépasse pas les limites élastiques du fil ou du ressort).

*Remarque* : il est parfois assez difficile de se procurer un ressort spiral. En revanche, un ressort d'élongation habituel accepte bien (surtout lorsqu'il est d'assez grand diamètre) de se comporter en ressort de torsion.

L'enregistrement de la position angulaire peut se faire selon les méthodes proposées précédemment. Pour utiliser le capteur de déplacement magnétostrictif, on réalise une conversion mécanique angle - position comme en figure 2b. Un des intérêts de ce dispositif est de permettre, en plus, l'étude du mouvement de l'oscillateur dans un puits de potentiel à deux minimums conduisant à de très fortes non-linéarités et à des phénomènes de bifurcation voire de chaos en oscillations forcées.

## 2.2. Oscillateurs à N degrés de liberté

Cette fois, si l'on veut enregistrer le mouvement de plusieurs solides simultanément, la solution que nous avons retenue est celle proposée par Leybold avec le dispositif Videocom.

Chacun des objets à suivre est doté d'un réflecteur (catadioptré) et l'ensemble est éclairé de manière stroboscopique par un ensemble de LED. Une caméra CCD (barrette de photodiodes) enregistre l'image des différents objets. Le logiciel détecte les positions successives de ces différentes images et construit un tableau  $[t, x_1, x_2, \dots]$ . Une exploitation peut se faire directement dans le logiciel Videocom. Nous avons préféré transférer le tableau dans le logiciel Synchronie afin de profiter de sa feuille de calcul.

*Remarque 1* : ce dispositif fonctionne très bien également pour un seul mobile. Nous avons préféré le capteur magnétostrictif car le signal du capteur étant une tension, il peut s'acquérir avec une carte d'acquisition standard et le traitement s'effectuer directement dans le logiciel d'acquisition (sans avoir besoin de transférer d'abord le fichier).

*Remarque 2* : le transfert se fait par l'intermédiaire du presse-papier. Le tableau est d'abord collé dans le bloc-notes (ou Wordpad) de façon à corriger la première ligne du tableau qui contient le nom des variables mais aussi les unités. On supprime ces dernières et on sauve le tableau ainsi modifié en format .txt lisible par tout tableur standard (dont Synchronie).

### 2.2.1. Oscillateur à deux degrés de liberté (pendules couplés)

Il est simplement formé de deux pendules simples identiques formés d'une masse suspendue à un fil (masses en forme de cylindre d'axe vertical en métal suffisamment brillant - ou recouvert de papier aluminium - pour donner un reflet directement visible par Videocom).

Un ressort de faible raideur (5 N/m) est placé à un niveau variable entre les pendules

(cf. figure 5a). On étudie les oscillations libres en écartant manuellement un (ou les deux) pendule de sa position d'équilibre.

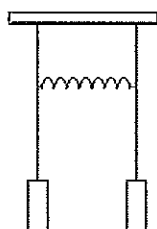


Figure 5a

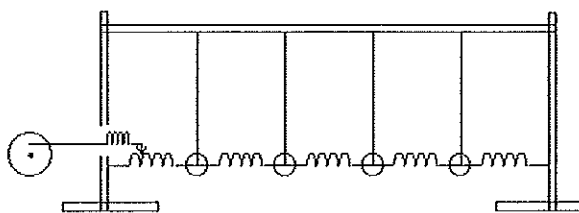


Figure 5b



Figure 5c

### 2.2.2. Oscillateur à N degrés de liberté

Nous reprenons la méthode décrite au § 2.1.3. : pendules mixtes (élastique et pesant) selon le schéma de la figure 5b. Nous avons réalisé un dispositif avec quatre masses et cinq ressorts identiques (en immobilisant certaines masses, on peut faire les situations correspondantes à trois masses, deux masses, voire une masse). Pour éviter des oscillations parasites transversales, chaque pendule est bifilaire (cf. figure 5c). Nous nous sommes intéressés aux oscillations forcées en excitant le dispositif par la même méthode que celle décrite en figure 4. Les résultats et leur interprétation sont présentés plus loin (§ 3.3.2. et annexe 4).

## 3. RÉSULTATS

### 3.1. Oscillations libres

#### 3.1.1. Oscillations libres faiblement amorties

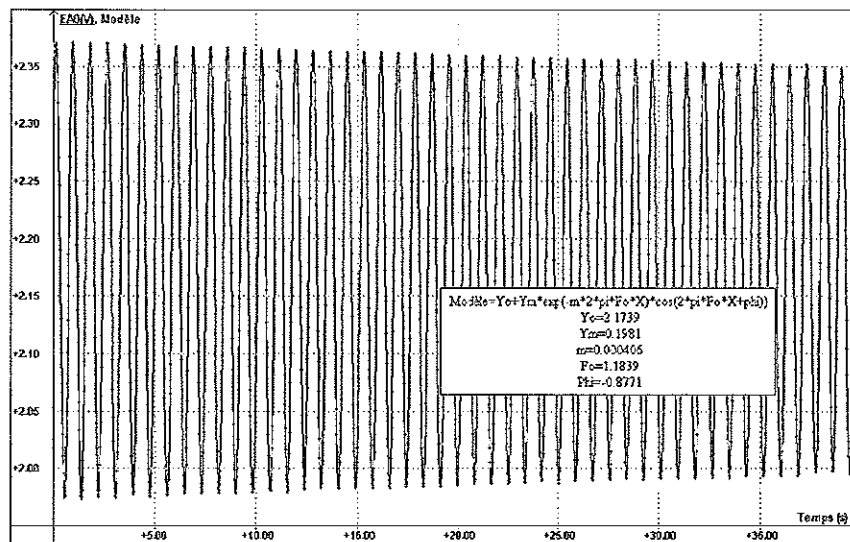
##### ◆ Oscillateur vertical et capteur de force

Les oscillations les moins amorties ont été obtenues avec l'oscillateur élastique vertical (§ 2.1.1.). L'enregistrement de la position est obtenu avec le capteur de force et présenté en Enr 1. L'ajustement de la position avec une fonction sinusoïdale amortie de la forme  $Y_0 + Y_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \exp(-m \omega_0 t)$  conduit à une valeur de  $m$  de  $0,4 \cdot 10^{-3}$  soit un coefficient de qualité  $Q = 1/2m$  de 1250.

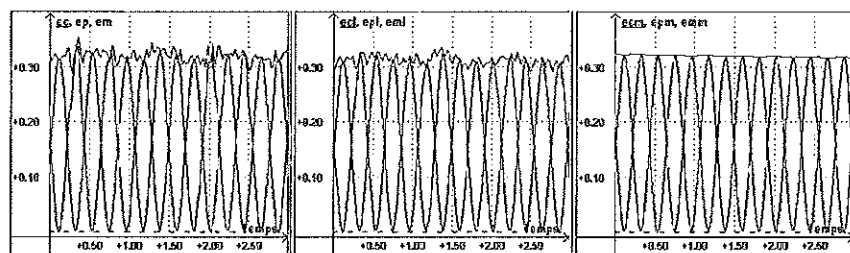
En revanche, la qualité de l'enregistrement (bien que très convenable) apparaît limitée lorsqu'on désire vérifier la conservation de l'énergie mécanique EM. Sans précautions particulières (sans lissage sur la position ni sur la vitesse), on observe des fluctuations qui peuvent être gênantes pour pouvoir convaincre un élève de la conservation de EM (Enr 2, fenêtre de gauche).

Avec lissage de position (d'ordre 5) et dérivation avec lissage (d'ordre 5 également), on observe une amélioration limitée (Enr 2, fenêtre médiane). On pourrait naturellement améliorer plus franchement en augmentant l'ordre du lissage mais ce serait au détriment de l'amplitude observée.





Enr 1



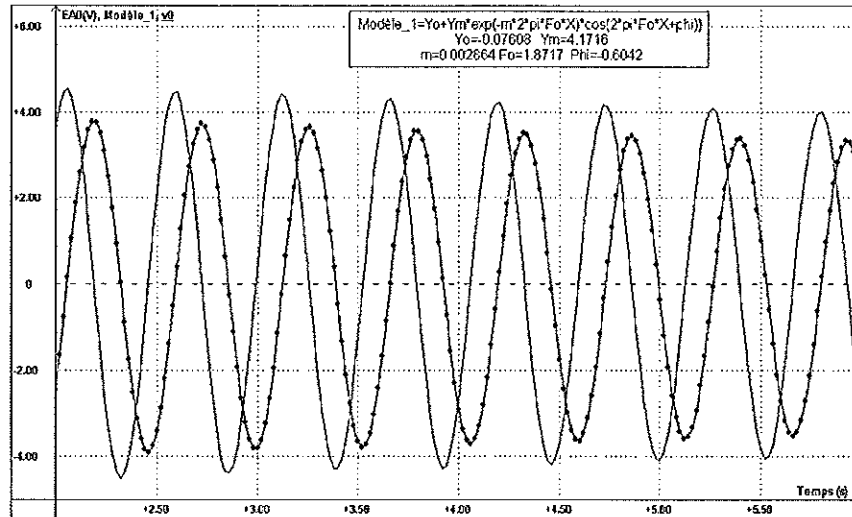
Enr 2

La fenêtre de droite est réalisée en prenant les points du modèle exponentiel amorti : cette fois, les résultats sont « parfaits » (mais on est à la limite de la tricherie !).

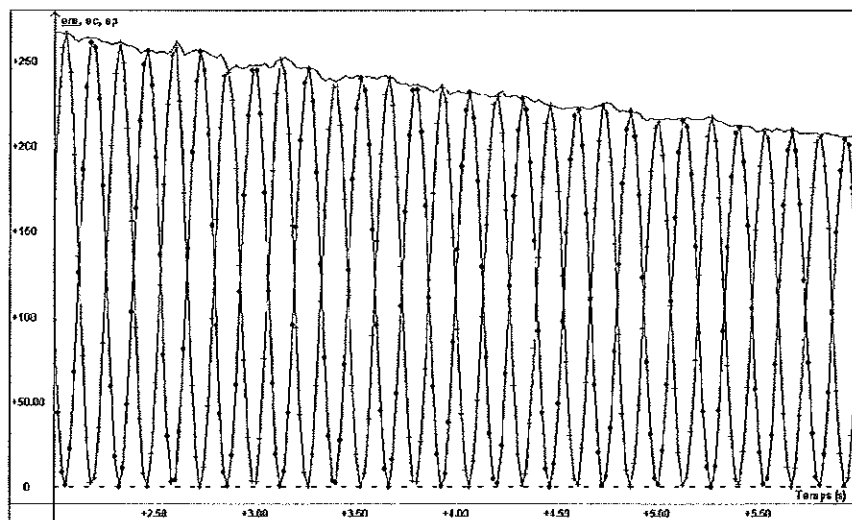
◆ Oscillateur horizontal et capteur magnétostrictif

Le meilleur résultat est obtenu avec l'oscillateur mixte et le capteur magnétostrictif (§ 2.1.3.). L'oscillateur est lancé manuellement et l'enregistrement commence lorsqu'on le laisse osciller librement. Les paramètres d'acquisition sont : 2000 échantillons de 20 ms, avec moyenne de 10 mesures par échantillon.

Enr 3 : oscillation libre, modélisation par sinuséide amortie en  $Y_m \exp(-m \omega_0 t) \cos(\omega_0 t + \varphi) + Y_0$ . Le très faible décalage  $Y_0$  vient d'un centrage imparfait du capteur. L'écart entre les points de mesure et la modélisation est pratiquement imperceptible. Le calcul de la vitesse par dérivation (sans lissage préalable) donne un signal très peu bruité ce qui



Enr 3



Enr 4

confirme l'excellence de l'enregistrement.

L'amortissement (de type fluide) est visible sur une longue durée d'enregistrement mais reste négligeable sur une dizaine d'oscillations ( $m = 0,00286$  soit un coefficient de qualité de  $Q = 1/2 m = 174$ ).

Feuille de calcul : (M = 0,257 kg ; K = 15 N/m ; l = 0, 5m)

$$v = \text{deriv}(ea0, t)$$

$$ec = 0,5 * 0,257 * v * v$$

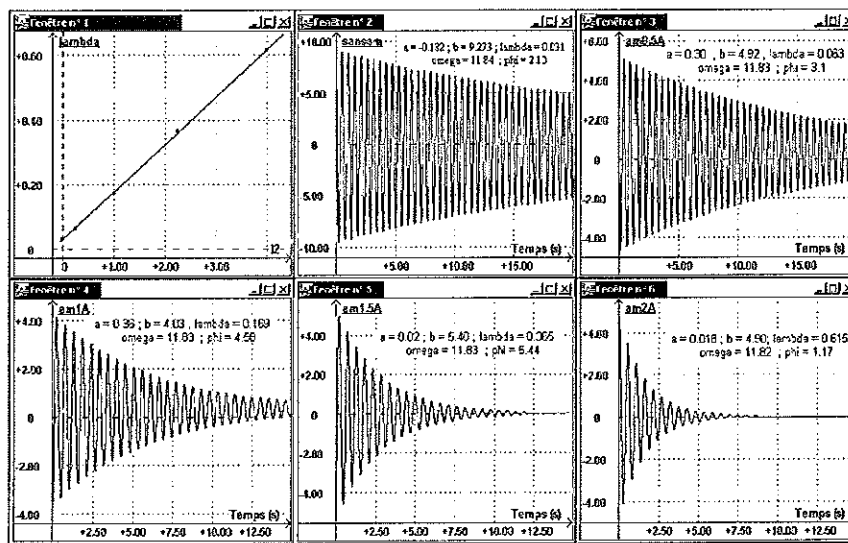
$$ep = 0,5 * (2 * 15 + 0,257 * 9,8 / 0,5) * (ea0 + 0,076)^2$$

$$em = ec + ep$$

Enr 4 : tracé des énergies cinétique ( $1/2 M v^2$ ), potentielle ( $2 * 1/2 Kx^2 + 1/2 Mx^2/l$ ) et totale. On constate la très bonne conservation de l'énergie totale (à l'amortissement faible près).

### 3.1.2. Influence de l'amortissement fluide

En alimentant l'électroaimant (transformateur démontable Leybold avec pièces polaires planes distantes de 1 cm et deux bobines de 500 spires) avec un courant I de respectivement 0 A, 0,5 A, 1 A, 1,5 A et 2 A, on observe les fenêtres 2, 3, 4, 5 et 6 de Enr 5. Les modélisations par sinussoïde amortie donnent des coefficients d'amortissement  $\lambda$  qui varient comme  $\alpha I^2 + \lambda_{res}$  (le champ B est pratiquement proportionnel à I, les courants de Foucault induits également et donc les forces de Laplace sur ces courants sont proportionnels à  $I^2$ ) en tenant compte de l'amortissement fluide résiduel  $\lambda_{res}$  (essentiellement dû aux frottements dans l'air). C'est ce qui est représenté en fenêtre 1.



Enr 5

### 3.1.3. Influence de l'amortissement solide

On utilise un pendule pesant composé dans l'approximation des faibles oscillations. Le frottement solide est provoqué par une tige métallique lestée qui appuie sur une partie cylindrique solidaire du pendule (cf. figure 6).

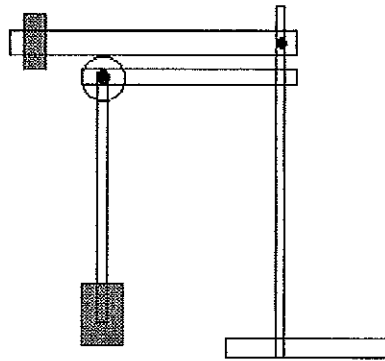
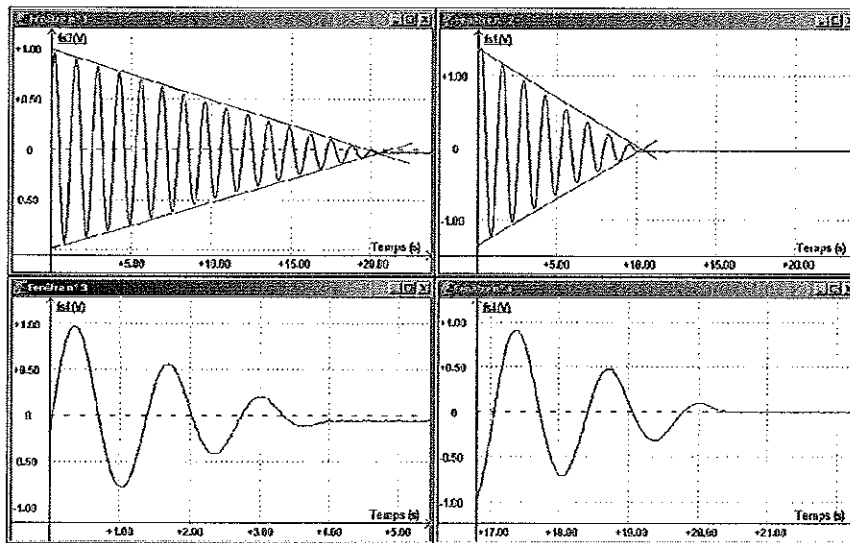


Figure 5b

En modifiant la valeur de la surcharge, on peut modifier la valeur de la force de frottement  $F$ . Les enregistrements (Enr 6) présentent les résultats pour différentes valeurs de  $F$ . On constate l'enveloppe rectiligne du régime oscillatoire, conforme à ce qu'indique la théorie.

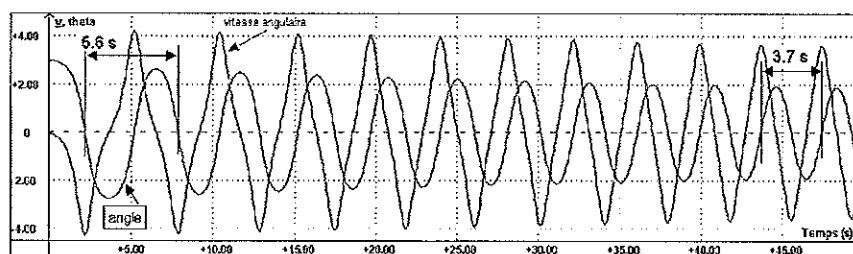


Enr 6

On constate aussi que la position d'arrêt n'est pas la position d'équilibre sans frottement et dépend des conditions initiales (fenêtres 3 et 4). C'est une caractéristique particulièrement gênante : le frottement solide est à éliminer autant que possible dans les dispositifs oscillants (un instrument de mesure analogique à aiguille par exemple).

### 3.1.4. Pendule pesant à grand angle

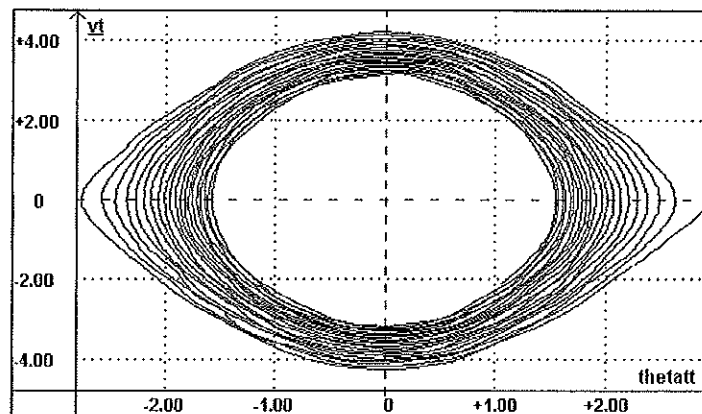
On utilise le dispositif de la figure 2b. On part d'une position initiale qui correspond, à très peu près, à  $\theta = \pi$  (position d'équilibre instable). On constate immédiatement sur l'enregistrement (Enr 7) que les premières oscillations ont une période sensiblement plus longues que les suivantes. De plus, le mouvement est assez éloigné d'une courbe sinusoïdale. C'est encore plus apparent lorsqu'on calcule la dérivée pour visualiser la vitesse.



Enr 7

Il y a plusieurs façons de caractériser ces non-linéarités :

- ◆ Le tracé dans le plan de phase (Enr 8)  $\dot{\theta} = f(\theta)$  montre que le mouvement n'est pas sinusoïdal : si c'était le cas, la courbe aurait la forme d'une ellipse (l'amortissement entraîne que la courbe spirale vers le centre). C'est seulement lorsque l'amplitude a décréu que la forme devient elliptique.



Enr 8

- ◆ La mesure des périodes successives des oscillations montre le non-isochronisme de celles-ci. La aussi, c'est seulement lorsque l'amplitude a beaucoup décréu qu'on retrouve cet isochronisme de période  $T_0$ . Il est même possible de vérifier (cf. figure 7) qu'en situation intermédiaire ( $\theta < \pi/2$ ) la période vérifie à peu près la relation de

Borda :

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\theta^2}{16} \right)$$

Attention, cette relation n'est plus valable à très grand angle. L'écart entre la période expérimentale et celle donnée par cette formule approchée est de l'ordre de 0,3 % à 60° mais atteint déjà 2 % à 90° (et 20 % à 140° !). En annexe 3, nous présentons le calcul exact de la période sans l'approximation des petits angles.

*Remarque* : pour mesurer automatiquement cette période en fonction de l'amplitude angulaire, on peut utiliser (dans Synchronie 2003) ces quelques lignes de calcul (theta étant l'élongation instantanée en radian enregistrée ici sur 8000 points) :

```
Env = cretemaxi(theta,0.1)    {construction de l'enveloppe}
Tpas= seuil(theta,t,0,1)    {instants de passage à 0}
n=rampe(1,8000)             {tableau de nombres entiers entre 1 et 8000}
nt=trunc(n,101)             {troncature du tableau au nombre de points
                             des tableaux Env et Tpas}
```

Tper= deriv(tpas,nt)

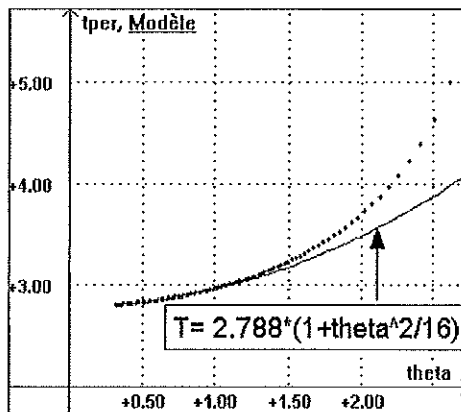
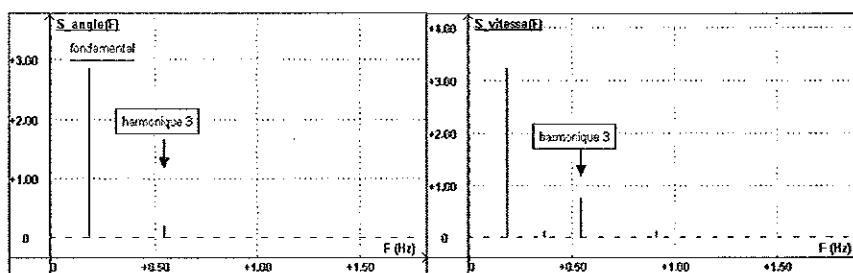


Figure 7

- ◆ La transformée de Fourier de l'enregistrement d'une oscillation à grand angle (Enr 9) fait clairement apparaître une fréquence fondamentale de fréquence N et une composante à la fréquence 3 N. C'est encore plus net sur la vitesse angulaire (spectre de droite) : la dérivation de  $\theta = \sin(\omega t) + a \sin(3\omega t)$  donne  $d\theta/dt = \omega \cos(\omega t) + 3a\omega \cos(3\omega t)$ . On voit même l'harmonique 5.

*Remarque* : la présence d'un harmonique 2 de faible amplitude (normalement nul) provient de l'amortissement (faible) qui fait apparaître une légère dissymétrie du signal.



Enr 9

### 3.1.5. Pendule de torsion avec double puits de potentiel

Le pendule de torsion simple est strictement harmonique c'est-à-dire que le puits de potentiel correspondant est parabolique  $E_p = 1/2 C \theta^2$ . Il est facile de le modifier afin d'avoir un potentiel à deux puits : il suffit de fixer (à la distance  $l$  de l'axe de rotation) une masse  $m$  sur le disque en rotation en position supérieure de manière à créer deux positions d'équilibre possibles, une à gauche, l'autre à droite de la position d'équilibre initiale (cf. figure 8a).

Il s'ajoute alors un terme potentiel égal à  $-mg l (1 - \cos \theta)$  ce qui conduit au potentiel à deux puits de la figure 8b.

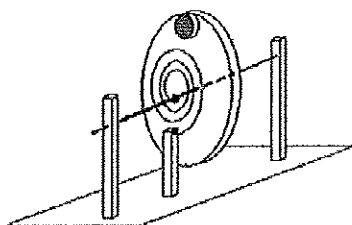


Figure 8a

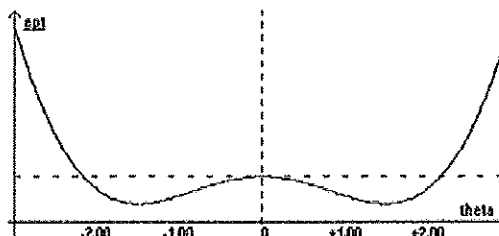
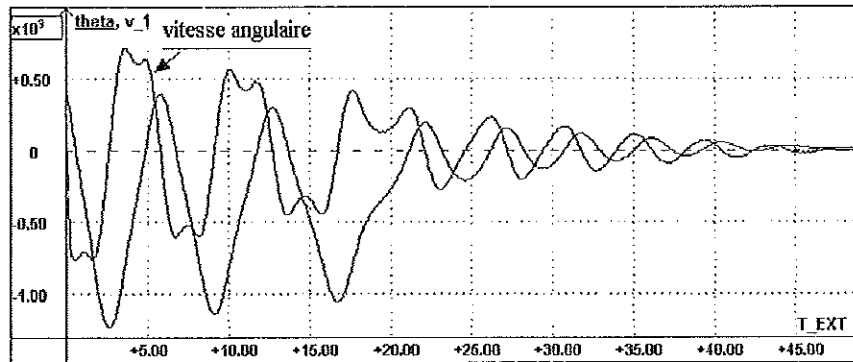


Figure 8b

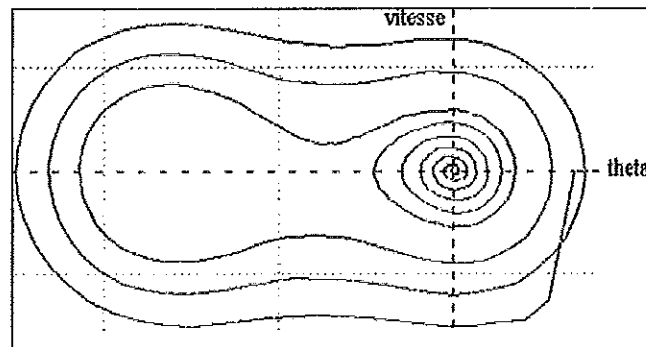
Le pendule ayant été écarté fortement d'une de ses positions d'équilibre, il va osciller librement et, au cours de son amortissement, il va finir par « tomber » dans un des deux puits de potentiel. Il est difficile de prévoir dans lequel car cela dépend de manière critique des conditions initiales (cette grande sensibilité aux conditions initiales conduit à un comportement chaotique en régime forcé).

L'enregistrement (Enr 10) de la position  $\theta(t)$  puis le calcul de la dérivée  $d\theta/dt$  conduit au portrait de phase ci-après (Enr 11).

Le mouvement oscillatoire est d'abord très éloigné d'un mouvement harmonique. Ensuite après une « bifurcation » il s'en rapproche progressivement et lorsque l'amplitude devient faible, le mouvement est sensiblement sinusoïdal. On notera la grande analogie de ces résultats avec ce qui a été obtenu au moyen d'oscillateurs non-linéaires en électronique par M. KROB [7].



Enr 10



Enr 11

### 3.2. Oscillations forcées

#### 3.2.1. Oscillateur harmonique

Les oscillations forcées sont étudiées avec le pendule mixte, l'excitation étant réalisée comme en figure 4. Pour une valeur de l'intensité dans l'électroaimant, on fait varier la fréquence du générateur BF qui commande le moteur pas à pas. Le moteur utilisé ayant 48 pas, la fréquence d'excitation est contrôlée avec grande précision (une variation de 1 Hz sur le BF correspond à  $\approx 0,02$  Hz). On enregistre l'établissement du mouvement forcé sur lequel on observe des battements qui s'atténuent progressivement. En effet, la solution générale de l'équation différentielle avec second membre  $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = F/m \sin \omega t$  est la somme :

- ♦ de la solution générale de l'équation sans second membre, sinusoïdale amortie (lorsque l'amortissement caractérisé par  $\lambda$  est faible :  $\lambda < \omega_0$ ) de pseudo-pulsation voisine de la pulsation propre  $\omega_0$ , de la forme  $A \sin \omega_0 t \exp(-\lambda t)$  ;
- ♦ de la solution particulière de l'équation avec second membre de pulsation  $\omega$  imposée.



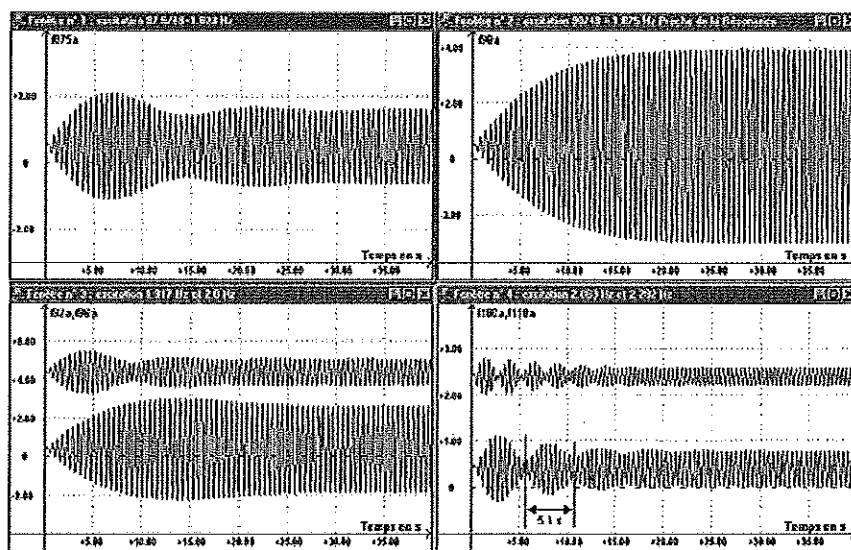
Le résultat est un phénomène de battements entre ces deux fréquences, battements qui s'atténuent avec l'amortissement de la solution en  $\omega_0$ . En régime permanent, il ne reste que le régime forcé à la pulsation  $\omega$ .

Les oscillateurs mécaniques, de période longue, avec la possibilité de réaliser un amortissement faible, sont particulièrement révélateurs de ce comportement transitoire (les oscillateurs électriques de type RLC présentent naturellement le même comportement mais il est généralement moins apparent - sauf lorsqu'on le recherche spécialement en utilisant des « trains d'onde »).

L'enregistrement (Enr 12) ci-dessous visualise le mouvement obtenu avec un oscillateur de fréquence propre  $f_0$  excité à une fréquence de  $f_{imp}$  : on aperçoit des battements de fréquence  $f_{batt} = f_0 - f_{imp}$ .

Plusieurs situations sont représentées dans les différentes fenêtres :

- fenêtre 1 : excitation de fréquence 1,823 Hz (87,5 Hz sur le BF) ;
- fenêtre 2 : excitation à 1,875 Hz : on est proche de la résonance puisque on ne voit plus de battements ;
- fenêtre 3 : 1,917 Hz (en bas) et 2,0 Hz ;
- fenêtre 4 : 2,083 Hz (en bas) et 2,292 Hz.



Enr 12

On peut mesurer la période des battements : un exemple sur la fenêtre 4 donne une période de 5,1 s soit une fréquence de 0,196 Hz. Cette fréquence est la différence entre la fréquence propre 1,887 Hz et la fréquence imposée 2,083 Hz. C'est même une méthode très précise pour déterminer la fréquence de résonance car il est fastidieux de la recher-

cher point par point en faisant varier la fréquence de l'excitation : il faut chaque fois attendre que le régime transitoire ait disparu. Ce régime transitoire possède une constante de temps qui vaut  $\tau = 1/\lambda$  et il faut attendre pratiquement un temps de l'ordre de  $5 \tau$  avant de pouvoir négliger le régime libre. Dans l'expérience ci-dessus,  $\lambda$  est de l'ordre de  $0,13 \text{ s}^{-1}$  et le régime permanent est observé au bout d'une quarantaine de secondes. On relève également l'amplitude  $A$  atteinte par le régime permanent (après la disparition du régime transitoire) à cette fréquence imposée. Pour différentes valeurs de  $f_{\text{imp}}$  on effectue la même mesure puis on trace la courbe de réponse  $A = f(f_{\text{imp}})$ .

Celle-ci correspond à un filtre passe-bas du deuxième ordre de fonction de transfert de type  $H = \frac{1}{1 + 2j m \frac{f}{f_0} - \frac{f^2}{f_0^2}}$  et de module  $|H| = \frac{1}{\left( \left( 1 - \frac{f^2}{f_0^2} \right)^2 + 4 m^2 \frac{f^2}{f_0^2} \right)^{1/2}}$ .

Le résultat de la modélisation par une fonction de ce type est présenté sur la figure 9 avec les paramètres issus de l'ajustement. On constate le très bon accord sur  $f_0$  et  $m = \lambda/\omega_0$  avec l'étude en régime libre (Enr 5 :  $\omega = 11,84 \text{ rad.s}^{-1}$  ;  $f = 1,884 \text{ Hz}$ ). Les mesures ci-dessus ont été réalisées avec un amortissement donné par un courant de  $0,7 \text{ A}$  dans l'électroaimant.

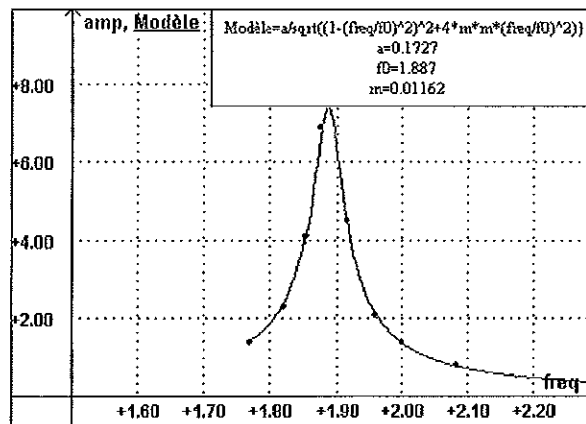
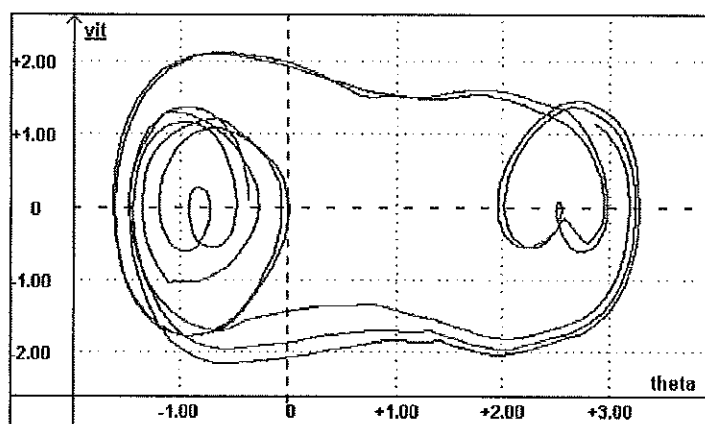


Figure 9

### 3.2.2. Oscillateur chaotique

Avec l'oscillateur de torsion à double puits, les oscillations forcées (créées en imposant une oscillation périodique de l'extrémité - fixe lors des oscillations libres - du ressort de torsion), le phénomène devient complexe puisqu'il n'est plus du tout périodique. Bien que le système soit totalement déterministe, la grande sensibilité de l'oscillateur aux conditions initiales fait que l'oscillation a lieu dans un puits puis passe dans l'autre puits d'une manière assez imprévisible. On parlera alors d'apparition d'un comportement **chaotique**.

Une bonne description du phénomène est représentée par le portrait de phase où la trajectoire du mouvement ne repasse jamais par les mêmes points. C'est ce que l'on constate sur l'enregistrement Enr 13 (nous n'avons volontairement gardé qu'une durée limitée d'enregistrement car le portrait devient rapidement très embrouillé !). On reconnaît tout de même comme limite extérieure approximative du portrait de phase la figure en forme de « cacahuète » qui apparaissait en Enr 11 (et qu'on retrouvera en Enr 21).



Enr 13

### 3.3. Oscillateurs à plusieurs degrés de liberté

#### 3.3.1. Pendules couplés

En annexe 4, on trouvera le calcul des pulsations propres du système dans le cas où chacun des pendules est indéformable (A) ou lorsque chaque pendule est constitué (comme c'est le cas dans notre expérience) d'une masse  $m$  suspendue à un fil de longueur  $l$ , le ressort étant placé à la distance  $d$  du point de fixation du pendule (B). L'une des pulsations propres  $\omega_1$  est toujours celle du pendule unique : lorsque les pendules oscillent en phase, tout se passe comme si le ressort n'intervenait pas puisqu'il ne change pas de longueur. L'autre pulsation  $\omega_2$  dépend aussi de la raideur  $k$  du ressort et de la distance  $d$  (selon une formule donnée dans l'annexe 4).

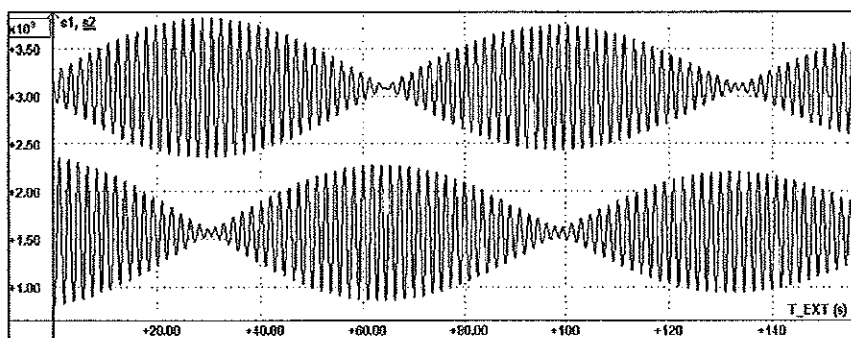
Nous avons enregistré le mouvement des deux pendules en prenant comme conditions initiales :

Pendule 1 au repos à l'équilibre ;

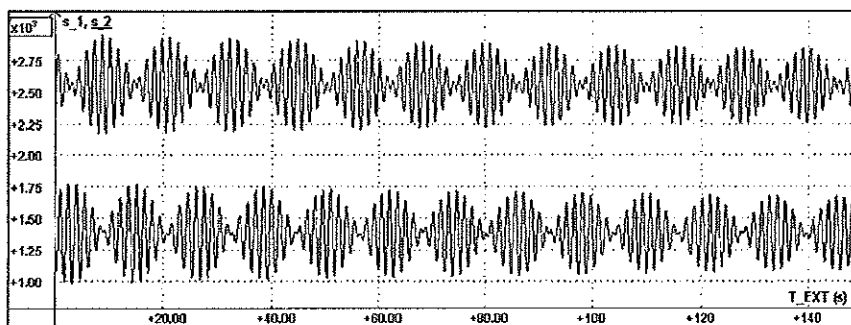
Pendule 2 écarté de sa position d'équilibre.

Les enregistrements Enr 14 et Enr 15 montrent les battements obtenus sur chacun des pendules pour deux valeurs du couplage (modification de la position  $d$ ). C'est donc la superposition (combinaison linéaire) des deux modes propres du système :

- ♦ le mode antisymétrique pour lequel on a  $\theta_1 = \theta_2$  et de fréquence  $N_1$  ;
- ♦ le mode symétrique pour lequel on a  $\theta_1 = -\theta_2$  et de fréquence  $N_2$ .

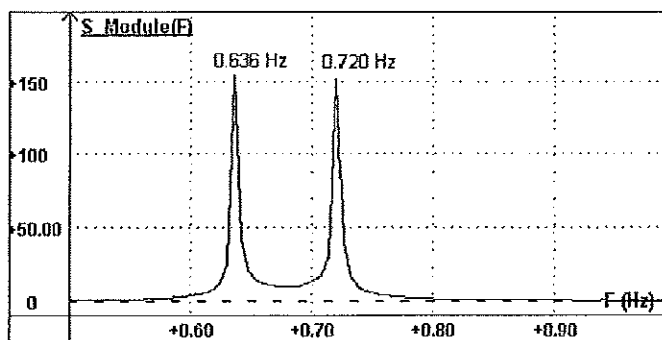


Enr 14



Enr 15

Le spectre ci-dessous (Enr 16) est obtenu à partir de l'enregistrement Enr 15 pour l'un des mobiles (pour l'autre mobile, cela donne le même spectre).



Enr 16

La fréquence des battements ( $N_{\text{bat}} = 0,084 \text{ Hz}$ ) est la différence des deux fréquences propres. Elle correspond bien à la périodicité des battements (11,9 s) que l'on peut mesurer

sur Enr 15. Les modes propres peuvent être excités sélectivement en donnant des conditions initiales adéquates. En écartant les deux pendules du même angle du même côté, on sélectionne le mode de basse fréquence et si on les écarte symétriquement, on sélectionne le mode 2.

### 3.3.2. Oscillateur à $N$ degrés de liberté. Relation de dispersion

Le couplage fait apparaître  $N$  fréquences propres (cf. annexe 5). Lorsqu'on impose une fréquence au système, on trouve une résonance chaque fois que la fréquence imposée est voisine de la fréquence d'un mode propre (égale lorsqu'on peut négliger l'amortissement). On a donc un système multirésonnant (situation que l'on retrouve dans d'autres domaines de la physique chaque fois que l'on a une cavité - corde de Melde, Fabry-Pérot, Laser...). Les fréquences ne sont des harmoniques d'une fréquence fondamentale que si le milieu est non dispersif. Ici, ce n'est pas le cas puisque  $\omega$  n'est pas proportionnel au nombre d'onde  $k$  (équation (2) de l'annexe 5).

#### Mesures et observations

L'observation des fréquences de résonance demande un balayage assez lent de la fréquence d'excitation car le dispositif présente un amortissement très faible et les régimes transitoires (faisant apparaître des phénomènes de battements complexes) durent assez longtemps (quelques dizaines de secondes). Cependant, lorsqu'on s'approche d'une fréquence propre, on voit l'amplitude augmenter rapidement. L'observation d'une diminution de l'amplitude après une phase d'augmentation (comme sur Enr 12 dans le cas de l'oscillateur simple) indique que l'on n'est pas encore exactement sur la fréquence propre. Nous indiquons les résultats observés successivement en changeant le nombre d'oscillateurs.

#### $N = 4$

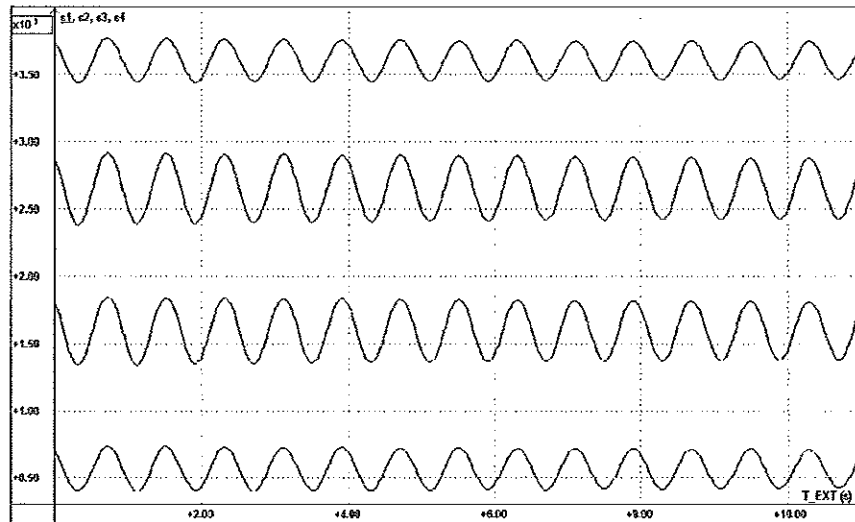
On trouve quatre fréquences de résonance. Pour la fréquence la plus basse (mode 1), toutes les masses oscillent en phase avec des amplitudes données par l'enregistrement Enr 17 (voir page ci-après).

Pour les autres modes (mode 2, mode 3, mode 4), on a les situations correspondantes données par la figure 14 de l'annexe 4. Les fréquences données par la relation (1) avec  $p = 1 ; 2 ; 3 ; 4$  se placent sur la courbe de dispersion donnée par la relation (2) et représentée en figure 13 (annexe 5).

#### $N = 3 ; 2 ; 1$

En immobilisant une des masses, on peut réaliser les autres situations et rechercher à chaque fois les différentes résonances. Les fréquences correspondantes se placent toujours sur la même courbe de dispersion.

Le tableau rassemble les résultats observés sur les fréquences de résonance et les



Enr 17

valeurs théoriques avec  $\omega_0^2 = g/l = 26,8$  ( $l = 36,5$  cm) et  $\omega_1^2 = 4K/m = 365$  ( $K = 27$  N/m ;  $m = 296$  g) ainsi que les amplitudes théoriques. La fréquence expérimentale observée est égale à celle du générateur BF (à 0,1 Hz près) divisée par 48.

N	Mode p	N <sub>BF</sub> (Hz)	$\omega_{exp}$ (rad/s)	$\omega_{th}$ (rad/s)	Amplitudes			
					Masse 1	Masse 2	Masse 3	Masse 4
4	1	60,2	7,87	7,85	0,588	0,951	0,951	0,588
	2	94,4	12,36	12,37	0,951	0,588	-0,588	-0,951
	3	124,4	16,28	16,30	0,951	-0,588	-0,588	0,951
	4	144,2	18,87	18,89	0,588	-0,951	0,951	-0,588
3	1	68,1	8,92	8,96	0,707	1	0,707	
	2	110,4	14,45	14,47	1	0	-1	
	3	140,5	18,39	18,39	0,707	-1	0,707	
2	1	82,4	10,78	10,86	0,866	0,866		
	2	133	17,41	17,34	0,866	-0,866		
1	1	111	14,52	14,47	1			

On constate un accord remarquable entre la valeur expérimentale de la fréquence et la valeur théorique (écart nettement inférieur au %). Les points expérimentaux se placent parfaitement sur la courbe de dispersion  $\omega(k)$  présentée en figure 13 de l'annexe 5. Quant aux amplitudes, celles observées sur Enr 17 sont proches de celles théoriques données par le tableau. Pour le mode 1, les amplitudes des oscillations des masses 1, 2, 3 et 4 sont respectivement de 167, 260, 272 et 165 : le rapport de l'amplitude des masses

Mai 2005 - avec le même  
pas à pas, prendre  
 $N_{BF} = \frac{25}{4} N_{BF}^{ci}$   
(même 200 pas au lieu de 48)

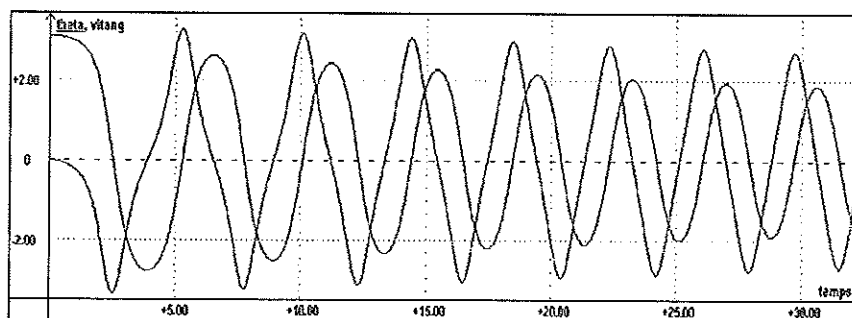
2 et 3 sur l'amplitude des masses 1 et 4 est de  $266/166 = 1,60$  expérimentalement alors qu'il est de  $0,951/0,588 = 1,617$  théoriquement.

#### 4. COMPARAISON AVEC LE LOGICIEL DE SIMULATION INTERACTIVE PHYSICS

On se restreindra ici aux cas que l'on ne peut pas résoudre analytiquement et dont une solution numérique est fournie par le logiciel Interactive Physics<sup>(4)</sup>. Ce logiciel remarquable permet de « construire » le dispositif expérimental en introduisant les différentes composantes du système et les contraintes auxquelles est soumis le dispositif réel. Ensuite le logiciel, à partir des conditions initiales données, élabore la solution numérique d'évolution du dispositif en respectant les lois fondamentales de la dynamique. Pratiquement, après avoir fait « tourner » Interactive Physics, nous avons transféré les fichiers numériques dans Synchronie afin d'avoir une représentation graphique comparable à celle utilisée pour l'expérience réelle.

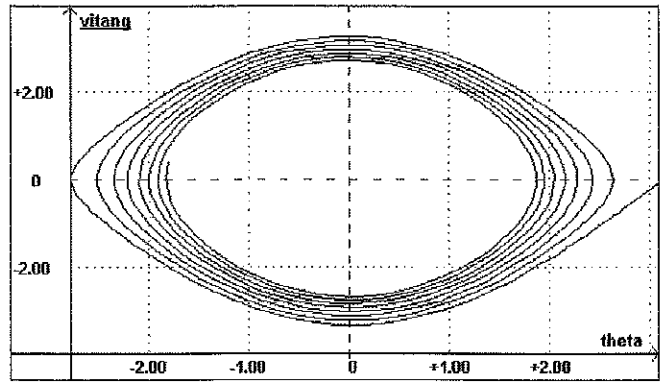
##### 4.1. Pendule pesant à grand angle

On peut introduire un frottement de rotation pour simuler l'amortissement du pendule réel. Les enregistrements Enr 18 et Enr 19 présentent l'évolution de l'angle et de la vitesse angulaire et le plan de phase. On constatera la remarquable similitude avec l'expérience réelle (Enr 7 et Enr 8).

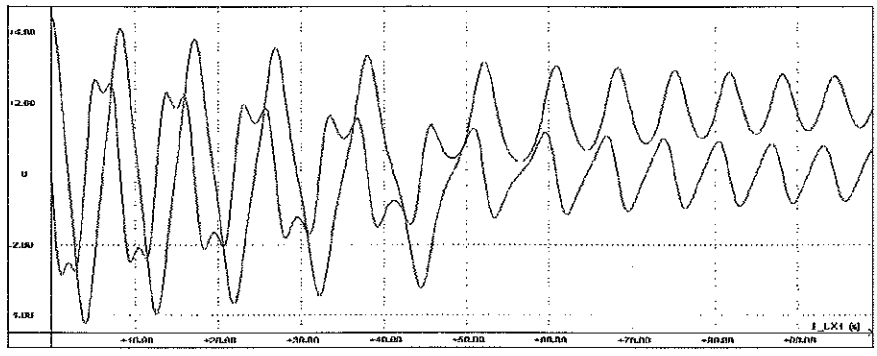


Enr 18

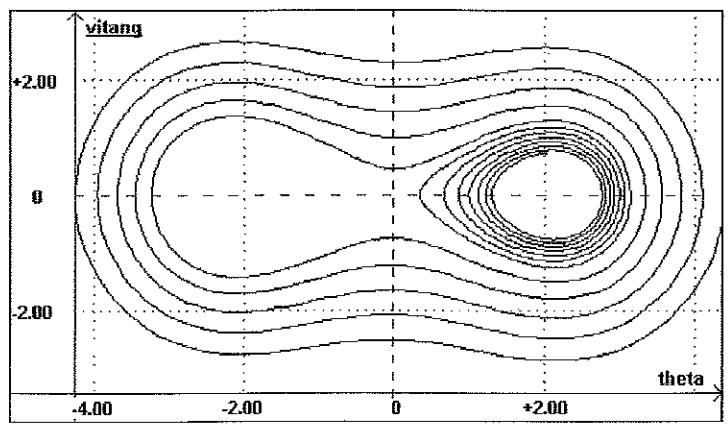
(4) Disponible chez BIOLAB - 8, rue Bobillot - 75013 Paris - Tél. : 01 69 49 69 59.



Enr 19



Enr 20



Enr 21



#### 4.2. Pendule de torsion à deux puits

On comparera les enregistrements Enr 20 et Enr 21 avec ceux de l'expérience Enr 10 et Enr 11.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOENIG G. Oscillateur mécanique horizontal. *Bull. Un. Phys.*, novembre 1992, vol. 86, n° 748, p. 1397-1401.
- [2] FAURE J. Oscillateur mécanique horizontal amorti. *Bull. Un. Phys.*, octobre 1993, vol. 87, n° 757 (1), p. 1287-1289.
- [3] CÉRONI C. Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques. *Bull. Un. Phys.*, mars 1998, vol. 92, n° 802, p. 485-489.
- [4] BOUYRIE G. Physique et calcul différentiel. *Bull. Un. Phys.*, février 2003, vol. 97, n° 851 (1), p. 275-298.
- [5] LIEVRE J.-P. *Les oscillateurs électriques et mécaniques*. CRDP Lyon, 1996.
- [6] NOURTIER A. Étude et réalisation d'un pendule élastique amorti. *Bull. Un. Phys.*, octobre 1992, vol. 86, n° 747, p. 1207-1218.
- [7] KROB M. Exemples d'oscillateurs non linéaires. *Bull. Un. Phys.*, juin 1996, vol. 90, n° 785 (2), p. 131-150.
- [8] Voir le site : <http://www.sensorland.com> puis How they work.
- [9] Notice du fabricant FGP Instrumentation ; site <http://www.fgp-instrumentation.com>
- [10] *Berkeley ondes*. Paris : Colin, 1982, chapitres 2 et 3.
- [11] *Bruhat mécanique*. Paris : Masson, 1966  
*Berkeley mécanique*. Paris : Colin, 1979, chapitre 7.



Roger DUFFAIT  
Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon-1  
Préparation au CAPES de physique-chimie  
Préparation à l'Agrégation de physique de l'ENS Lyon

## Annexe 1

### Capteur magnétostrictif [8, 9]

---

La magnétostriction est un phénomène d'interaction entre certains matériaux et un champ magnétique qui se manifeste par une déformation mécanique de l'échantillon soumis au champ. Dans le capteur, c'est la torsion d'un fil (ici de nickel) qui se produit localement par l'interaction entre le champ longitudinal créé par un aimant permanent placé au voisinage du fil (en pratique fixé sur le mobile à étudier) et un champ magnétique transitoire produit par une impulsion de courant appliquée sur le fil (effet Wiedemann). La déformation se propage (à la vitesse du son dans le matériau  $\approx 3000 \text{ ms}^{-1}$ ) le long du fil et l'on mesure l'intervalle de temps entre le départ de la déformation et son arrivée à l'extrémité du fil. La détection de l'instant d'arrivée de la déformation se fait par l'effet inverse (effet Villari) : une contrainte appliquée à un matériau magnétostrictif change ses propriétés magnétiques (perméabilité).

La durée de propagation est strictement linéaire (non-linéarité  $< 0,2 \%$ ) avec la distance parcourue ; elle est mesurée par une horloge et un convertisseur fournit une tension analogique proportionnelle à cette durée donc linéaire avec la position de l'aimant permanent. Celui que nous avons utilisé avait une course mécanique de 10 cm codée sur  $[-10 \text{ V}, +10 \text{ V}]$ .

## Annexe 2

### Oscillations forcées - Influence du dispositif

---

Considérons le pendule élastique horizontal formé d'une masse  $m$  soumise à l'action de deux ressorts de raideur  $k$ . L'équation du mouvement en régime libre  $m\ddot{x} + 2Kx = 0$  conduit à la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{2K/m}$ .

L'excitation est appliquée par l'intermédiaire du ressort  $R_c$  de raideur  $K_c$  placé au point  $M$  situé sur le ressort de gauche  $R$  à la fraction  $a$  ( $< 1$ ) de la longueur de ce ressort (cf. figure 10), l'autre extrémité de ce ressort étant animée d'un mouvement alternatif de pulsation  $\omega_p$ . On décompose le ressort  $R$  de longueur  $l$  en deux ressorts : l'un  $R_1$  de longueur  $al$ , l'autre  $R_2$  de longueur  $(1-a)l$ . Les raideurs respectives de ces ressorts sont  $K_1 = K/a$  et  $K_2 = K/(1-a)$ .

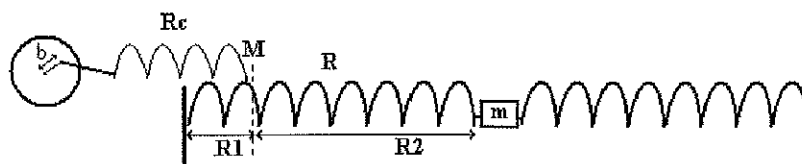


Figure 10

En appelant  $x_1$  le déplacement de M par rapport à sa position d'équilibre et  $x$  le déplacement de la masse  $m$ , la RFD appliquée à cette dernière s'écrit :

$$m\ddot{x} + Kx + \frac{K}{1-a}(x - x_1) = 0$$

Pour exprimer  $x_1$  en fonction de  $x$ , on écrit l'égalité des forces appliquées en M.

$K_1 x_1 + K_c (b \sin \omega_1 t + x_1) = K_2 (x - x_1)$  où  $b$  représente le rayon de rotation de l'excentrique. On en déduit, en posant  $\alpha = K_c a(1-a)/K$  :  $x_1 = x a / (1/\alpha) + b \sin(\omega_1 t) \alpha / (2 + \alpha - a)$

En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$m\ddot{x} + x \left( K + \frac{K}{1-a} \left( 1 - \frac{a}{1+\alpha} \right) \right) = A \sin \omega t$$

En pratique,  $K_c = 5 \text{ N/m}$  ;  $K = 15 \text{ N/m}$  et  $a = 1/10$  (on accroche le ressort  $R_c$  sur la quatrième spire d'un ressort  $R$  comprenant 40 spires), on obtient  $\alpha = 0,03$ . En approximant  $1/1 + \alpha$  en  $1 - a$ , on aboutit à une nouvelle pulsation propre :

$$\omega = \sqrt{\frac{K \left( 2 + \frac{a\alpha}{1-a} \right)}{m}} \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{a\alpha}{4(1-a)} \right)$$

soit numériquement une variation inférieure à 1 pour 1000.

Un calcul plus direct (en considérant le ressort  $R_c$  « en parallèle » avec  $R_1$ , l'ensemble en série avec  $R_2$ ) conduit au même résultat (en considérant que les raideurs s'associent comme les capacités des condensateurs).

### Annexe 3

#### Calcul exact de la période du pendule pesant

Si l'oscillation passe de  $-\theta_m$  à  $+\theta_m$  et en posant  $k = \sin \theta_m / 2$ , on peut montrer [11] que la période  $T$  de l'oscillation vaut ( $T_0$  étant la période des petites oscillations) :

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Le calcul de cette valeur pour différentes valeurs de  $\theta_m$  peut s'effectuer dans tout logiciel de calcul. Nous avons ici utilisé la feuille de calcul de Synchronie 2003. Afin d'avoir une bonne précision sur la valeur de l'intégrale, nous avons pris 1000 points de mesure.

```

phi=rampe(0,pi/2)
nm=rampe(0,1)
theta=2*asin(nm)
pborda= 1+((theta)^2/16)
k=0
n=1
per=table(1)
.repeter 1000
den=sqrt(1-k*k*(sin(phi))^2)
f=1/den
perrel=2*integ(f,phi,0,1.5708)/pi
affecter(per,n,perrel)
k=k+0.001
n=n+1

```

Les résultats sont présentés ci-dessous (cf. figure 11) et comparés avec les points expérimentaux et ce que donne la formule de Borda. La fenêtre de droite est une loupe pour les angles inférieurs à  $90^\circ$ .

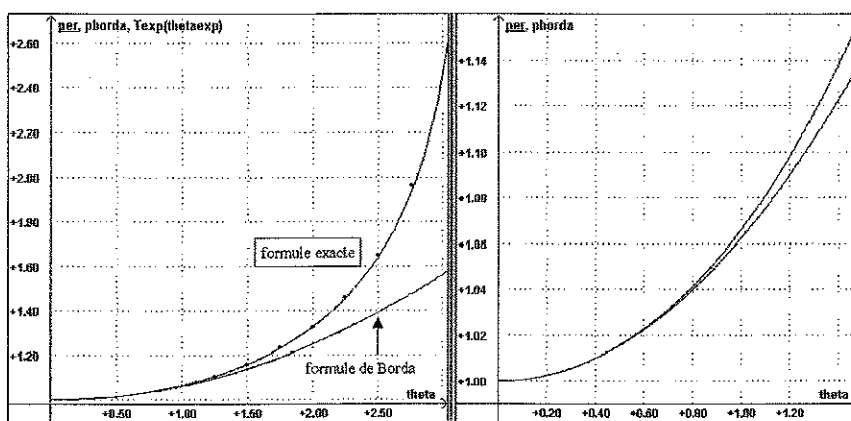


Figure 11

### Annexe 4

#### Calcul des périodes propres des 2 pendules couplés

A. Cas où chaque pendule est formé d'une masse  $m$  soutenue par une tige rigide sans masse formant un pendule de moment d'inertie  $I = ml^2$ . La distance entre le point de fixation du pendule et la position du ressort étant  $d$  et  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles des pendules par rapport à la verticale, le ressort s'allonge de :  $d(\theta_1 - \theta_2)$ . Dans l'approximation des petits angles, les équations différentielles couplées qui régissent le système sont obtenues par la relation fondamentale de la dynamique appliquée aux mouvements de rotation :

$$I d^2\theta_1/dt^2 = mg^d\theta_1 + K d(\theta_1 - \theta_2)d$$

$$I d^2\theta_2/dt^2 = mg^d\theta_2 + K d(\theta_2 - \theta_1)d$$

En cherchant une solution harmonique de la forme  $\theta_i = A_i \sin \omega t$ , le système devient :

$$(mg^d + Kd^2 - m^2\omega^2)\theta_1 - Kd^2\theta_2 = 0$$

$$-Kd^2\theta_1 + (mg^d + Kd^2 - m^2\omega^2)\theta_2 = 0$$

La résolution donne les deux pulsations propres :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2Kd^2}{ml^2}}$$

Le premier mode correspond à la pulsation d'un pendule unique : lorsque les deux pendules oscillent en phase, le ressort n'a aucune influence. Pour le mode correspondant aux oscillations en opposition de phase, la pulsation est plus élevée et tout se passe comme si un ressort de raideur  $2K$  (c'est-à-dire de longueur moitié) exerçait un couple de rappel supplémentaire sur chaque pendule.

B. Cas où chaque pendule est formé d'une masse  $m$  à l'extrémité d'un fil (déformable) de masse négligeable. Pour simplifier, on calculera la pulsation correspondant au mode  $\omega_2$  des pendules en opposition de phase (l'autre pulsation  $\omega_1$  n'est pas affectée par le ressort et a la même expression que ci-dessus). Mais cette fois, le calcul est un peu plus complexe puisque le fil se déforme au point de fixation du ressort. Il apparaît les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de la figure 12 ainsi que les tensions  $T_1$  et  $T_2$  du fil. On conduit le calcul sur un pendule unique en considérant qu'il est soumis à un ressort de raideur  $2K$ . On se place toujours dans l'approximation des petits angles.

Au point de fixation du ressort, on peut écrire :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_R = \vec{0}$$

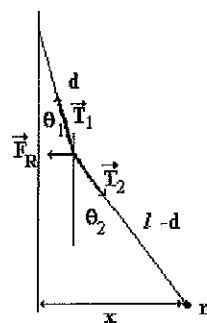


Figure 12

soit en projection suivant l'axe horizontal  $T_1 \theta_1 + 2K d \theta_1 = T_2 \theta_2$ . Pour la masse  $m$ , la RFD s'écrit  $m d^2/dt^2 = mg \theta_2$  avec  $x = d \theta_1 + (l - d) \theta_2$ . La projection sur l'axe vertical permet d'écrire  $T_1 \approx T_2 \approx mg$ .

Finalement, on arrive à :

$$\omega_2^2 = \frac{g}{\frac{mgd}{mg + 2Kd} + l - d} = \omega_1^2 \left( 1 + \frac{2Kd^2}{mgl + 2Kd(l - d)} \right)$$

Dans notre expérience (Enr 15), on a  $m = 0,158$  kg ;  $l = 61,5$  cm ;  $d = 22,5$  cm et  $K = 5,3$  N/m. Expérimentalement, nous avons mesuré  $N1 = 0,636$  Hz et  $N2 = 0,720$  Hz. Les formules donnent  $\omega_1 = 3,992$  rad/s et  $\omega_2 = 4,526$  rad/s, soit  $N1 = 0,635$  Hz et  $N2 = 0,720$  Hz.

## Annexe 5

### Oscillateur à $N$ degrés de liberté - Relation de dispersion (cf. [10])

Chaque masse de numéro  $n$  écartée de sa position d'équilibre de  $x_n$  est soumise à une force de rappel qui est la somme :

- de l'action des ressorts de raideur  $K$  reliés aux masses  $n - 1$  et  $n + 1$  ;
- de l'action du pendule de longueur  $l$  ;

d'où l'équation : 
$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} + K(x_n + x_{n-1}) - K(x_{n+1} - x_n) + \frac{mg}{l} x_n = 0$$

En posant  $\omega_0^2 = g/l$  on arrive à :

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} - \frac{K}{m} (x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) + \omega_0^2 x_n = 0$$

On cherche une solution en  $x_n = A_n \cos(\omega t)$  avec  $A_n = \sin(pn\pi/(N+1))$  respectant les conditions aux limites  $A_0 = 0$  et  $A_{N+1} = 0$  ( $1 \leq p \leq N$ ).

$$\sin \frac{pn\pi}{N+1} \left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2K}{m} \right) = \frac{K}{m} \left( \sin \frac{p(n+1)\pi}{N+1} + \sin \frac{p(n-1)\pi}{N+1} \right)$$

$$\sin \frac{pn\pi}{N+1} \left( \omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2K}{m} - \frac{2K}{m} \cos \frac{p\pi}{N+1} \right) = 0$$

Pulsations des modes propres :

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{m} \sin^2 \frac{p\pi}{2(N+1)}} \quad 1 \leq p \leq N \quad (1)$$

En appelant  $a$  la distance entre deux masses (au repos) donc une longueur totale de  $(N+1)a$ , on peut exprimer la longueur d'onde par  $\lambda = 2(N+1)a/p$  ou le nombre d'onde par  $k = p\pi/(N+1)a$ .

#### Relation de dispersion

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2}} \quad (2)$$

avec  $k < \pi/a$  et  $\omega_1^2 = 4K/m$ .

La courbe représentative de  $\omega$  en fonction de  $p/N+1$  (ou  $k a/\pi$ ) est donnée en figure 13.

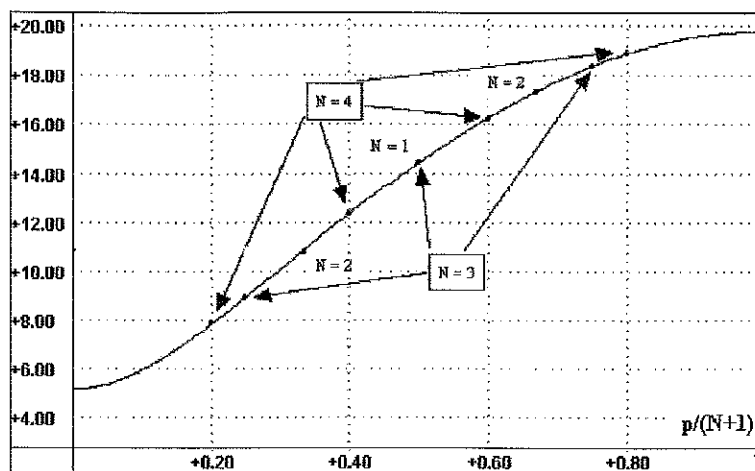


Figure 13

Les points expérimentaux (cf. tableau au § 3.3.2.) sont positionnés pour les différentes valeurs de N et les modes correspondants. La figure 14 représente chacun des modes de vibration et les positions des différentes masses correspondantes (pour la clarté, l'élongation longitudinale des masses est représentée transversalement). Par exemple, on constate que (dans le cas de quatre masses) pour le mode 2 (et le mode 4), le milieu du ressort central est immobile et que pour le mode 1, toutes les masses oscillent en phase.

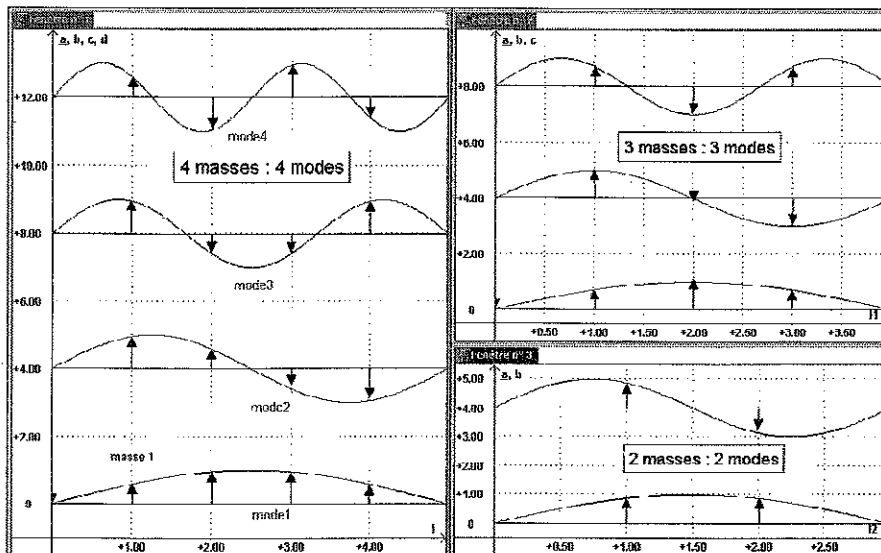


Figure 14