

COPIE

SERIE DE PUBLICATION PHYWE

P80.11

# Le Gyroscope

Ref: 21320

Kurt Magnus

COPIE

PHYWE AG, B.

TECHNO-SCIENCES  
Z.A. L'AGAVON - SYNERGIPARC  
AVENUE JEAN JAURES- BAT. 14  
13170 LES PENNES-MIRABEAU  
TEL. 04 42 02 80 78  
FAX 04 42 02 83 06  
techno-sciences@wanadoo.fr

**Nota:**

Suite à des modifications apportées au gyroscope de Magnus 02550.00 les figures 73, 78, 80 et 81 dans le livre «Le Gyroscope» par Kurt Magnus ne sont plus valables en tous leurs détails.

Les instructions de montage figurant à la page 134 dudit livre sont à annuler et à remplacer par celles jointes au gyroscope.

## TABLE DES MATIERES

<b>1.</b>	<b>Introduction</b>	1-6
<b>2.</b>	<b>Le gyroscope symétrique</b>	7-40
2.1	La loi fondamentale de l'effet gyroscopique: Les mouvements de précession	7
a)	L'expérience de précession	7
b)	Explication de l'expérience de précession. Le théorème du parallélisme de même sens des axes de rotation	9
c)	L'expression quantitative de l'expérience de précession	11
2.2	Les mouvements de nutation	14
a)	La tenue du gyroscope exempt de forces	14
b)	L'expression quantitative du mouvement de nutation	17
c)	Autres expériences sur le mouvement de nutation	18
2.3	La précession pseudo-régulière	22
2.4	La tranquillité de marche du gyroscope symétrique	24
2.5	Le pendule gyroscopique	26
a)	Assujettissement par ressorts	26
b)	Assujettissement par un couple de gravité	29
c)	Cas limites du pendule gyroscopique	32
2.6	L'influence de l'inertie du cadre	34
a)	Dérive cinétique du gyroscope à Cardan exempt de forces	35
b)	Le gyroscope à cardan lourd	38
<b>3.</b>	<b>Le gyroscope asymétrique</b>	41-58
3.1	Les précessions	41
3.2	Les nutations	42
3.3	Le gyroscope assujetti	47
a)	L'axe de la figure est l'axe du plus grand moment d'inertie principal	48
b)	L'axe de la figure est l'axe du moment d'inertie principal moyen	48
c)	L'axe de la figure est l'axe du plus petit moment d'inertie principal	50

3.4	Le gyroscope asymétrique à deux degrés de liberté	51
3.5	Le réglage d'un corps asymétrique oscillant dans l'axe du plus grand moment d'inertie principal	52
3.6	Découplage des oscillations d'un corps asymétrique en cas d'oscillations autour des axes des moments d'inertie principaux	54
3.7	L'influence de l'inertie du cadre	55
<b>4.</b>	<b>Les phénomènes gyroscopiques</b>	<b>59-74</b>
4.1	Le disque, le rond de bière, le boomerang	59
4.2	La déviation latérale d'un projectile	61
4.3	La toupie, le cerceau et la bicyclette	64
4.4	Le broyeur à meules et l'hélice	68
4.5	La terre et les satellites	70
<b>5.</b>	<b>Les appareils gyroscopiques</b>	<b>75-112</b>
5.1	Le gyroscope directionnel, un conservateur de cap	75
a)	Le principe	75
b)	L'erreur de Cardan	77
5.2	L'horizon gyroscopique	80
a)	L'horizon gyroscopique non piloté	81
b)	L'horizon piloté par une précession avec un couple de gravité	82
c)	L'erreur de virage	85
d)	La précession pilotée de l'horizon Sperry	87
e)	L'horizon avec précession pilotée par système à billes entraînées	88
5.3	Le compas gyroscopique, un indicateur de cap	91
a)	Pourquoi le compas gyroscopique indique-t-il le nord?	91
b)	L'expérience avec le compas gyroscopique	92
c)	L'erreur de route	95
5.4	Les gyromètres et leurs applications	97
a)	Le gyromètre assujéti par ressorts	98
b)	Le gyromètre intégrateur	100
c)	Le gyromètre, détecteur d'une plate-forme stabilisée	102
d)	Les plate-formes gyroscopiques pour la navigation inertielle	103
5.5	Le gyroscope de navire "SCHLICK" comme exemple d'un gyroscope de stabilisation	106
a)	Le principe du gyroscope stabilisateur de navire	106
b)	L'erreur du gyroscope stabilisateur de navire	109

<b>6. Annexe</b>	113-142
6.1 Explication de quelques notions de mécanique et de la technique gyroscopique	113
a) Vecteur force et vecteur couples	113
b) Poids, centre de gravité, couple de gravité	115
c) Axe de rotation, vitesse de rotation et vitesse angulaire	116
d) Le vecteur vitesse de rotation	116
e) Masse et moments d'inertie	118
f) Le rayon d'inertie	119
g) L'ellipsoïde d'inertie	119
h) Axes d'inertie principaux et moments d'inertie principaux	120
i) Le moment cinétique	121
j) Le théorème du moment cinétique	122
6.2 Terminologie employée en technique des appareils gyroscopiques	123
6.3 Description et notice d'utilisation du gyroscope-modèle pédagogique de Phywe AG	134
a) Description	134
b) La manœuvre du modèle	138
c) Instructions de montage	141
<b>7. Bibliographie</b>	143-144
7.1 Publications de livres en langue allemande	143
7.2 Articles de revues	143

## AVANT-PROPOS

La première édition de ce petit guide a été écrite il y a plus de vingt ans. Deux raisons m'y ont poussé, d'une part, la demande souvent formulée, après des conférences devant un auditoire de personnes intéressées par la technique, de techniciens et d'ingénieurs, d'écrire et d'éditer l'essentiel du contenu des conférences et d'autre part, mon propre souhait de rédiger une description et une notice d'emploi du gyroscope-modèle pédagogique, utilisé lors des conférences et initialement conçu uniquement pour mes propres besoins. L'intérêt inattendu qu'a soulevé ce modèle d'appareil a conduit les Ets. PHYWE AG à Göttingen à reproduire l'appareil et à poursuivre son développement.

Toutefois, n'écrire qu'une notice d'emploi ne m'enchantait guère. Ainsi fut finalement conçu un certain guide à travers le domaine du gyroscope et de ses applications enrichi d'une description de nombreuses expériences. J'ai essayé dans ce guide de mettre en valeur les idées fondamentales nécessaires à la compréhension des phénomènes gyroscopiques sans présumer de connaissances théoriques préalables et particulières. Toutefois, comme la compréhension ne doit pas se faire au détriment d'une netteté scientifique, ce projet n'était précisément pas facile à réaliser. Néanmoins, j'ose espérer que le résultat va être profitable. De multiples avis favorables et le fait qu'environ 10 ans après la première parution, il était nécessaire de procéder à une réédition inchangée dans l'essentiel et plus tard plusieurs fois réimprimée, permettent un constat de réussite.

Après un nouvel épuisement de cette édition je ne pouvais me résoudre d'accorder une nouvelle fois le droit à une réimpression non modifiée. Trop de nouveautés sont intervenues dans le domaine du gyroscope, les 20 dernières années. On ne peut pas simplement les ignorer sans paraître désespérément dépassé. De plus, non seulement une quantité de jugements, de propositions d'élargissements et d'améliorations mais aussi un certain trésor d'expériences avec le modèle pédagogique se sont, entretemps, accumulés. Les futurs intéressés n'en devraient pas être privés. Pour cette raison de nouveaux chapitres et de nombreuses descriptions d'expériences se sont ajoutés lors de la retouche. Certaines modifications du style général s'avéraient nécessaires du fait que le livre s'adressait maintenant à un cercle de lecteurs qui se distingue, à bien des égards, du cercle des intéressés bien circonscrits et très limités de la première édition. Me référant aux expériences acquises, je pense que même des spécialistes, c.à.d. des ingénieurs qui ont affaire à des appareils gyroscopiques vont accueillir avec satisfaction une présentation des lois fondamentales générales plus facilement accessibles. Parallèlement aux compléments on a aussi procédé à des transpositions. En outre, on a supprimé ou présenté autrement

quelques descriptions nettement trop élémentaires. Plus d'un lecteur va certainement apprécier le classement par thème reproduit dans l'annexe.

Lors de la reprise, je souhaitais transmettre au lecteur prêt à collaborer, un peu de cette joie de pouvoir pénétrer dans un tel domaine intéressant des connaissances. Cet ouvrage devrait être une première incitation et une aide. Celui, qui au-delà de l'enseignement a pénétré par propre expérience, par jeu ou par réflexion plus loin dans le royaume fascinant du gyroscope, comprendra l'astronome Sir John Herschel qui, de son temps, désignait le gyroscope comme un instrument philosophique.

Je voudrais profiter de l'occasion de la réédition pour remercier cordialement tous les lecteurs qui m'ont aidé par leur avis. Si le succès n'avait pas été tel, je n'aurais jamais eu l'idée de reconsidérer une reprise de l'ouvrage déjà dépassé. Mes remerciements vont aussi à mes assistants actuels, avant tout à Mr. Dipl. Ing. Helmut Sorg, qui a fait avancer la réédition par une collaboration méticuleuse et une critique pertinente, puis à Mr. cand. mach. László Pelényi qui a exécuté le projet et le nouveau dessin de nombreuses figures avec grand talent. Mais je voudrais aussi remercier ici PHYWE AG ainsi que le Sté INDUSTRIE-DRUCK GmbH pour leur collaboration aussi bien agréable qui stimulante et leur parfaite compréhension à mon égard.

Stuttgart, Janvier 1965

KURT MAGNUS

## 1. INTRODUCTION

Chacun de nous a certainement dans sa vie joué avec des toupies. Leurs comportements bizarres éveillent la curiosité et incitent, en même temps, à exécuter de multiples variations dans le jeu avec cette même toupie. Qui n'a pas observé, fasciné, les curieux mouvements chancelants de la toupie juste avant sa chute définitive? Qui n'a pas fait des essais pour étudier la façon d'une toupie de parer les chocs?

Des artistes exécutent des choses merveilleuses avec des assiettes, cerceaux, couteaux et tiges tournants. Ils utilisent dans ce cas précisément ces propriétés gyroscopiques qui sont aussi responsables de la danse curieuse de la toupie des enfants.

Il y a plus de 200 ans on a déjà essayé d'utiliser d'une façon utilitaire les propriétés gyroscopiques des corps en rotation. Serson a construit un appareil judicieux qui, même en cas de mauvaise visibilité, permettait de reconnaître l'horizon sur un navire en tangage. C'était le premier horizon gyroscopique (horizon artificiel). De nos jours, de tels appareils sont devenus indispensables en navigation sur mer et dans l'air. Les appareils gyroscopiques n'indiquent non seulement l'horizon mais aussi le cap. Ce sont aussi des appareils gyroscopiques qui sont utilisés pour la stabilisation d'avions, lors du pilotage automatique, et des navires équipés d'installations d'amortissement du roulis.

Même notre terre peut être assimilée à un gigantesque gyroscope. Ses mouvements de nutation sont d'un grand intérêt pour les géophysiciens et les astronomes car ils permettent de cette manière d'expliquer les déviations du pôle et entre-autres, aussi l'origine des cycles glacières.

Les quelques exemples que nous venons de citer indiquent que les mouvements gyroscopiques sont d'un grand intérêt dans la nature et la technique et leur importance est loin d'être négligeable. Ce livre a été consacré à leur description, leur explication et signification. Toutefois, avant de parcourir le domaine des lois gyroscopiques, nous nous devons d'expliquer ce que l'on entend sous un gyroscope. Tout d'abord la définition:

**Tout corps rigide qui exécute un mouvement de rotation est un gyroscope.**

Aucune importance que la rotation soit lente ou rapide. La terre tournant lentement ou les ailes d'un moulin à vent tournant avec nonchalance forment aussi bien des



gyroscopes que les rotors d'une turbine en rotation rapide. Les propriétés gyroscopiques se produisent en fonction du type de suspension, c.à.d. des possibilités de mouvement. Des mouvements gyroscopiques ne peuvent être engendrés avec un rotor dont l'axe repose sur des paliers fixes. Par contre, les propriétés gyroscopiques apparaissent sous forme de forces complémentaires dans les paliers. Lorsqu'on sus-

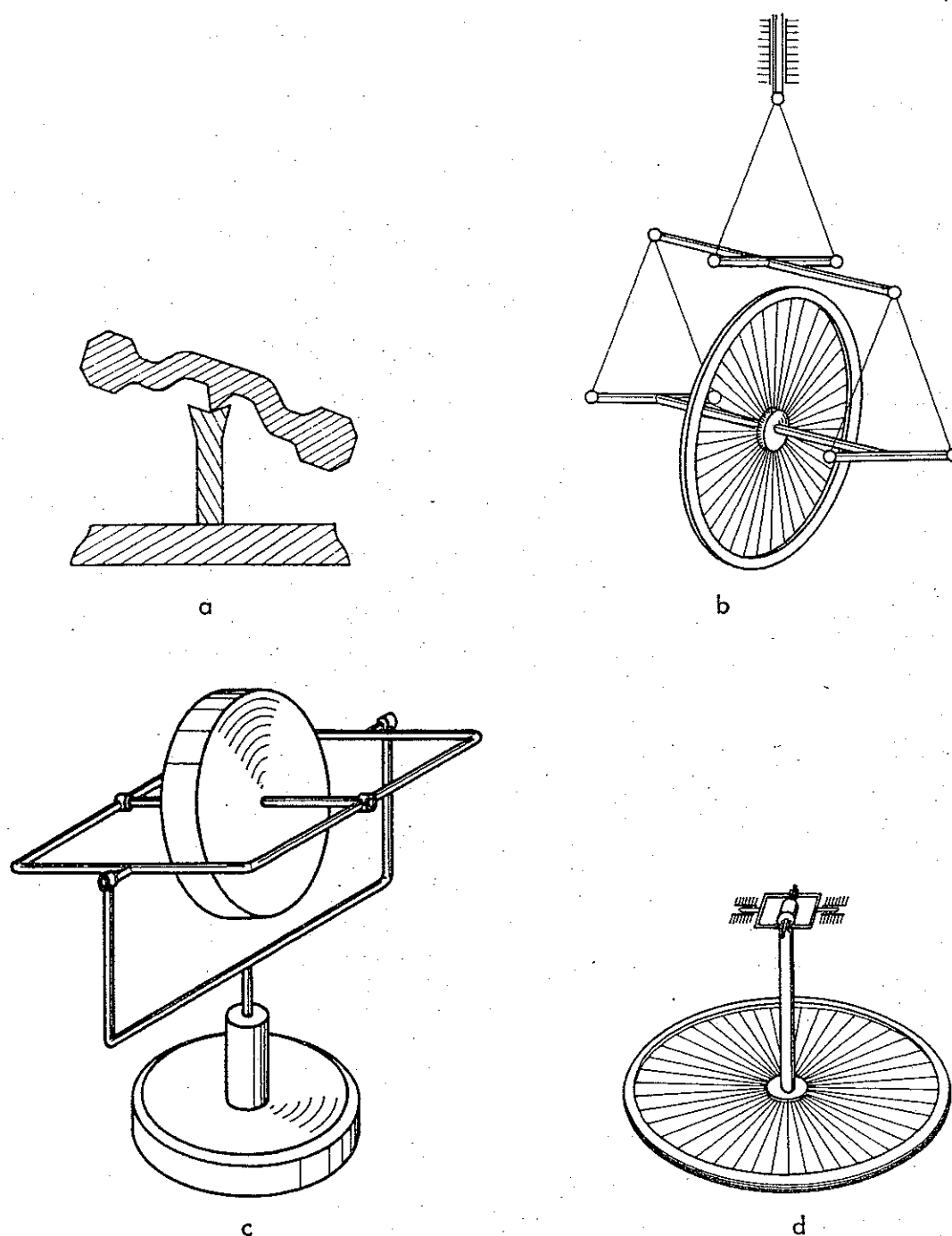


Fig. 1. Différents types de suspension de gyroscope.

pend l'axe du rotor de telle façon qu'il puisse librement pivoter dans l'espace, il est possible d'observer les formes typiques du mouvement propre au gyroscope. Quelques types de suspension permettant au rotor une totale liberté dans sa rotation sont représentés dans la fig. 1. Ils se composent de:

- a) La suspension par cuvette et pivot, telle qu'elle était utilisée dans des modèles gyroscopiques de type ancien (par ex. de Maxwell);
- b) La suspension suivant Prandtl est un support constitué d'un parallélogramme en fils et tiges permettant à l'axe du rotor de se mouvoir aussi bien suivant l'axe horizontal que suivant l'axe vertical;
- c) La suspension à la Cardan dans laquelle le rotor est supporté par deux cadres qui entourent le rotor par l'extérieur (cardan extérieur);
- d) La suspension par articulation à la Cardan, dans laquelle le rotor peut entourer le système de suspension de la même manière qu'indiquée dans la suspension par pivot (a) (cardan intérieur).

Les rotors suspendus de la façon indiquée ont 3 degrés de liberté de rotation car ils peuvent tourner librement autour de chacun des axes spatiaux perpendiculaires entre eux. Lorsqu'on limite la liberté de mouvement - en maintenant par exemple le cadre extérieur fixe dans le cas c) -, il ne reste dans ce cas que deux degrés de liberté de rotation. Si l'on retient maintenant encore le cadre intérieur il ne reste au rotor qu'un seul degré de liberté celui de tourner autour de son propre axe.

En plus de ses mouvements de rotation, le gyroscope peut exécuter des mouvements de déplacement pendant lesquels il parcourt une trajectoire spatiale quelconque - qu'on pense, par exemple, aux mouvements oscillants d'un disque lancé en rotation. Or, la physique nous apprend que les mouvements rotatifs autour du centre de gravité d'un corps peuvent être analysés séparément des mouvements de déplacement. Nous nous intéressons ici exclusivement aux mouvements rotatifs et nous parlerons par la suite uniquement de tels mouvements.

Dans la définition du gyroscope indiquée ci-devant on parle d'un corps **rigide**. Effectivement, les lois gyroscopiques ne s'appliquent telles qu'elles vont être expliquées ici, que pour des rotors rigides. Même s'il n'existe pas dans la nature des corps absolument rigides, il est tout de même judicieux de raisonner sur le cas limite. Les résultats restent toujours valables avec une précision suffisante lorsque les déformations du rotor restent petites. Des cordes tournantes, des courroies d'entraînement, des chaînes ou des liquides en rotation peuvent, certes, faire apparaître des effets qui ressemblent à des phénomènes gyroscopiques, toutefois ces mouvements obéissent à des lois compliquées qui ne feront pas l'objet de notre analyse dans ce cadre.

En commençant par des phénomènes simples concernant les corps tournants - c.à.d. les gyroscopes - nous allons essayer de décrire et d'expliquer la conformité à des

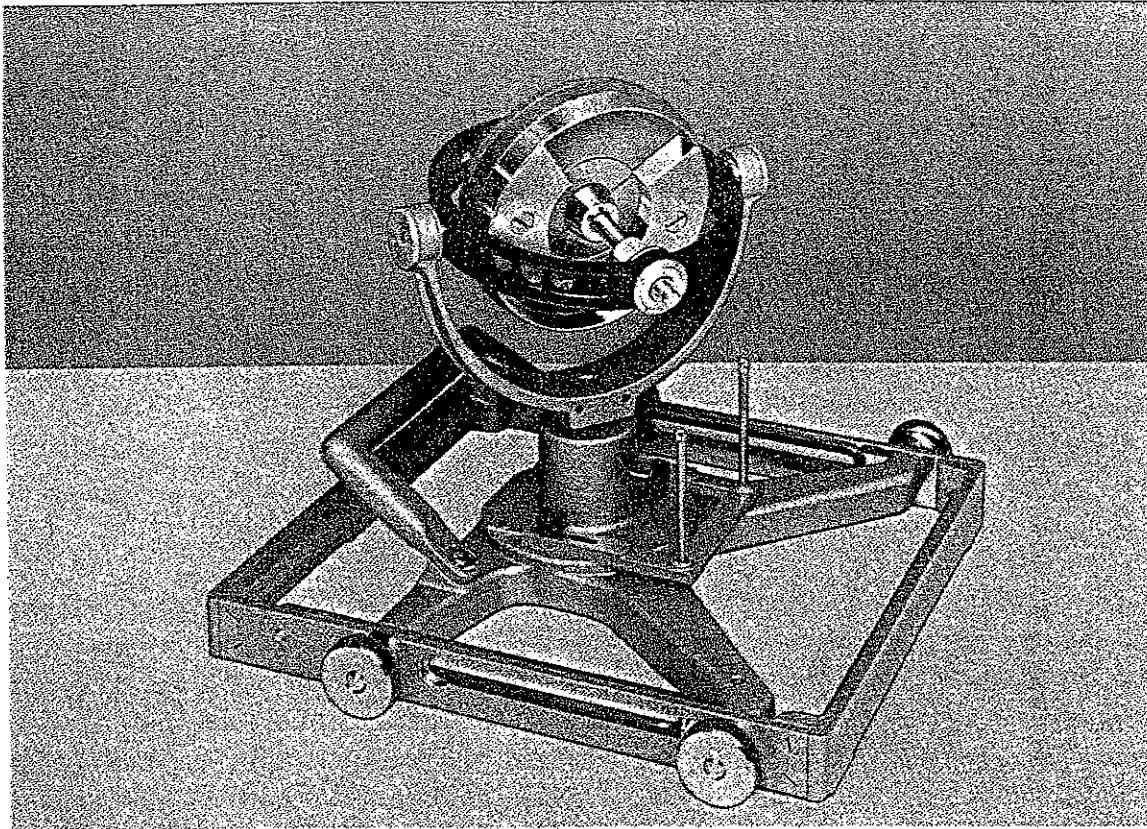


Fig. 2. Model d'enseignement de gyroscope à suspension par Cardan.

lois, des mouvements observés. Les énoncés seront visualisés part des expériences. Les descriptions et les explications sont à considérer comme une première approche et c'est, par des propres observations et expérimentations, qu'on pourra facilement progresser dans la matière et dans le vrai sens du mot acquérir en jouant lumières et connaissances. Toutefois, je voudrais conseiller aux lecteurs intéressés par les expériences d'examiner d'abord la description du modèle de gyroscope utilisé ici (fig. 2) ainsi que les instructions générales d'utilisation qui lui sont applicables (voir annexe 6.3). De multiples manipulations inutiles seront ainsi évitées et on aura par la suite plus chaque science a son propre langage spécialisé qui n'a pas été inventé, comme souvent on le prétend par malveillance pour décourager le novice, mais par nécessité et utilité pour la saisie et la description précise de l'exposé. C'est ainsi que l'on ne pourra pas se passer de quelques notions complémentaires lorsqu'on voudra sortir de l'élémentaire. Au lecteur formé à la physique, la plupart de ces notions seront familières. Toutefois, pour donner un aperçu et pour faciliter la compréhension des expressions spécialisées, les notions les plus importantes ont été rassemblées et succinctement expliquées, une fois pour toutes, dans le paragraphe 6.1. En plus de l'explication des notions les plus utiles, le relevé du chapitre 6.2 est un fil conducteur dont l'étude approfondie peut être conseillée à tous ces lecteurs qui, d'une façon quelconque, ont à faire avec des appareils gyroscopiques ou qui doivent lire la bibliographie qui s'y rapporte.

On ne peut pas éviter d'utiliser dans le cadre de cette étude, certaines expressions dans un sens plus strict et plus précis que dans leur définition en langage normal usuel. Un tel exemple se présente dès le début avec le gyroscope **symétrique** par lequel nous allons commencer l'exposé dans le chapitre suivant. La symétrie se rapporte ici non à la forme visible extérieure mais à la configuration de l'ellipsoïde d'inertie rattachée au corps (voir chapitre 6.1). Même si on utilise souvent des expressions représentatives, on ne devra absolument pas perdre de vue leur signification souvent plus limitée et plus précise dans l'étude des effets gyroscopiques. En effet, les expressions telles que "gyroscope aplati" et "gyroscope allongé" se rapportent à des rotors de configuration en forme de disque ou de barre en général, toutefois leur définition plus précise est seulement possible si on prend en considération les rapports des grandeurs des différents moments principaux d'inertie (voir annexe 6) ou la configuration de l'ellipsoïde d'inertie.

Dans les chapitres suivants on analysera d'abord séparément les lois générales pour des gyroscopes symétriques et asymétriques. Ensuite, on expliquera quelques phénomènes gyroscopiques rencontrés dans la nature et en technique et enfin on parlera des applications des lois gyroscopiques dans les appareils gyroscopiques.

## 2. LE GYROSCOPE SYMETRIQUE

Par gyroscope symétrique, on entend un corps rigide en rotation dont l'ellipsoïde d'inertie est symétrique par rotation (voir annexe 6.1). Pour un tel gyroscope, les deux moments d'inertie principaux sont identiques. De tels types de gyroscopes symétriques jouent un rôle important dans les applications des phénomènes gyroscopiques, car les gyroscopes utilisés en technique sont, pratiquement sans exception, symétriques. Chaque corps de révolution (barre ronde, disque rond, corps de cloche etc) représente un gyroscope symétrique. Toutefois, cette symétrie par rotation du corps n'est pas nécessaire. Par exemple, un disque carré est un gyroscope symétrique, deux de ses moments d'inertie principaux étant identiques par symétrie.

Pour l'ensemble des expériences avec le gyroscope symétrique formulées dans ce paragraphe, les poids-disques du gyroscope-modèle décrit en annexe sont disposés comme le montre la fig. 74 de cet annexe. Mais ce corps ainsi conçu n'est pas un corps de révolution, néanmoins, il représente tout de même un gyroscope symétrique parce que les moments d'inertie pour deux axes se trouvant dans le même plan et perpendiculaire entre eux sont toujours identiques.

### 2.1 La loi fondamentale de l'effet gyroscopique: Les mouvements de précession

#### a) L'expérience de précession

Si un corps en repos mais pouvant se mouvoir librement est soumis à une force, le corps cède à cette force et se met en mouvement. Ceci est aussi vrai pour le mouvement rotatif: Un corps en repos mais suspendu et pouvant tourner librement cède en amorçant une rotation lors d'une application d'un couple. Une expérience va nous confirmer cette pratique journalière: nous déposons, avec précaution, le gyroscope étant immobile, un des poids additionnels sur un côté du cadre intérieur à Cardan (fig. 3). Immédiatement le côté chargé de l'anneau bascule vers le bas. En déposant le poids de l'autre côté, on constate que le sens de rotation du mouvement produit est dépendant de la direction du couple. Le vecteur rotation et le vecteur couple possèdent dans ce cas simple toujours la même direction.

Nous renouvelons maintenant l'expérience, mais lançons d'abord le gyroscope à l'aide de la manivelle d'entraînement. Le gyroscope ne cherche maintenant plus, après

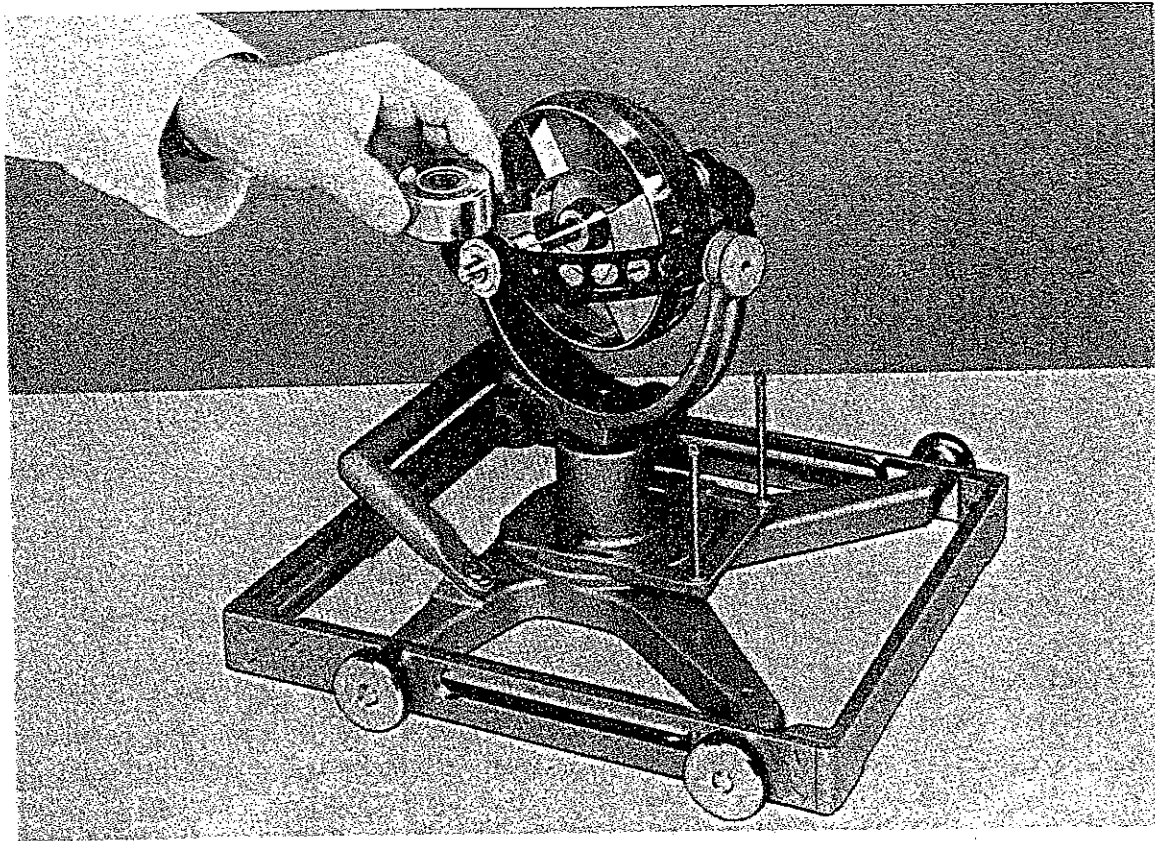


Fig. 3. L'expérience de précession.

fixation du poids, à céder au couple agissant. Le cadre intérieur reste au contraire invariablement horizontal. Par contre le gyroscope complet se met à tourner lentement autour de l'axe extérieur à Cardan et s'écarte donc perpendiculairement du couple agissant. Cet écartement est désigné par mouvement de précession ou plus brièvement par **précession** du gyroscope. Le gyroscope exerce donc une précession sous l'influence d'un couple agissant sur lui.

En exécutant l'expérience, veuillez poser lentement et avec précaution le poids, car autrement les mouvements de nutation, sujet traité ultérieurement, risquent d'avoir une action perturbatrice.

Nous posons maintenant le poids sur l'autre côté du cadre intérieur et constatons qu'alors le sens de rotation de la précession est lui aussi modifié.

Toutefois avant de vouloir essayer d'approfondir, en procédant à d'autres expériences, ce comportement remarquable et à première vue surprenant, une brève réflexion devra nous permettre de comprendre l'expérience de précession. En même temps une loi va se dégager qui sera pour nous un moyen important, souvent employé avec avantage pour l'explication de la suite de notre étude.

b) Explication de l'expérience de précession. Le théorème du parallélisme de même sens des axes de rotation.

Avant d'aborder une explication en premier lieu qualitative du processus de précession, étudions la figure 4. Un gyroscope représenté sous forme d'un disque tournerait autour de son axe dans le sens de la flèche indiquée. Chaque point de la circonférence a alors une vitesse déterminée dont la grandeur dépend de la vitesse de rotation du disque et de la distance des différents points matériels à l'axe de rotation. Dans le cas d'un disque circulaire, tous les points matériels de la circonférence possèdent la même vitesse. La direction du mouvement est déterminée chaque fois par la tangente correspondante au bord du disque. Les vecteurs vitesses aux points a resp. b sont  $v_1$  resp.  $v_1'$ . Soit maintenant une force (vecteur force  $K$ ) agissant sur l'axe du gyroscope. Cette force a pour conséquence de former un couple (vecteur couple  $M$ ) au point A (point de maintien du gyroscope), qui cherche à faire tourner le gyroscope autour de la direction de l'axe du couple. Si le gyroscope pouvait céder à ce couple, comme ceci serait le cas pour un disque non tournant, les points a resp. b recevraient après un temps infime  $\Delta t$  les vitesses  $v_2$  resp.  $v_2'$ . Si l'on additionne graphiquement (vectoriellement) ces vitesses aux vitesses  $v_1$  resp.  $v_1'$ , on obtient les résultantes  $v_3$  resp.  $v_3'$ . Les points matériels se trouvant à ce moment aux points a resp. se déplaceraient après le temps  $\Delta t$  avec des vitesses  $v_3$  resp.  $v_3'$  s'ils étaient complètement libres de leurs mouvements. Ils ne sont, toutefois, pas libres mais reliés rigidement avec les autres points matériels du disque. Le disque gyroscopique cède certes à la tendance des points matériels aux points a et b à laquelle s'ajoute la rotation autour de l'axe reporté en traits interrompus sur la fig. 4, toutefois son angle de rotation ne se confond pas avec l'angle  $\alpha$  formé par les vecteurs  $v_1$  et  $v_3$  (fig. 5) mais il lui reste proportionnel. Evidemment, nous ne pouvons pas à partir de cette considération calculer quantita-

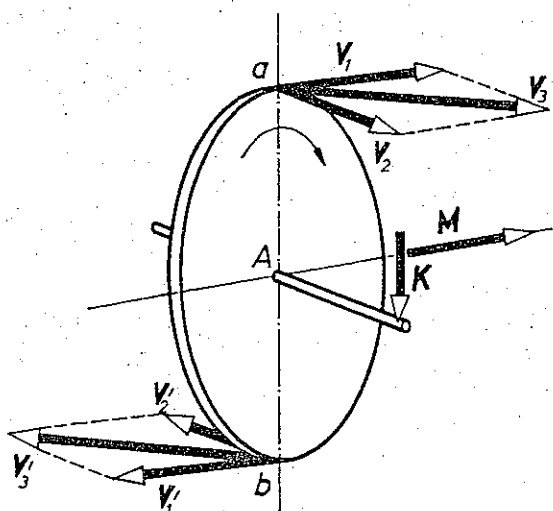


Fig. 4. Pour l'explication de l'expérience de la précession.

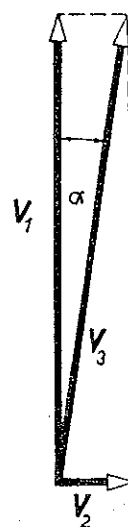


Fig. 5. Addition des vitesses  $v_1$  et  $v_2$ .

tivement sans autres la vitesse de précession, mais nous pouvons discerner une propriété importante de la précession. En prenant en considération des temps  $\Delta t$  suffisamment petits, on peut écrire avec une précision suffisante:

$$\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

Si maintenant la force  $K$  respectivement le couple  $M$  continue à agir d'une façon régulière, la vitesse  $v_2$  augmente, elle aussi, régulièrement c.à.d. linéairement avec le temps. Par voie de conséquence, comme on peut le reconnaître immédiatement dans la formule pour  $\alpha$ , l'angle  $\alpha$  doit croître régulièrement avec le temps. Il en est de même lors d'une rotation régulière du disque gyroscopique complet autour de l'axe normal (ou axe zéro) représenté en traits interrompus et qui est perpendiculaire à l'axe de rotation et perpendiculaire à l'axe du couple. Cette rotation régulière est la précession du gyroscope observée pendant l'expérience.

L'explication qualitative fournie ici pour la précession gyroscopique n'est valable que pour des temps  $\Delta t$  suffisamment petits. Mais on explique aisément à l'aide du théorème du moment cinétique que ce mouvement s'effectue de la même manière même pour des intervalles de temps plus longs. Le théorème du moment cinétique dit que la modification dans le temps du vecteur moment cinétique  $D$  est égal au vecteur couple  $M$

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = M \quad (1)$$

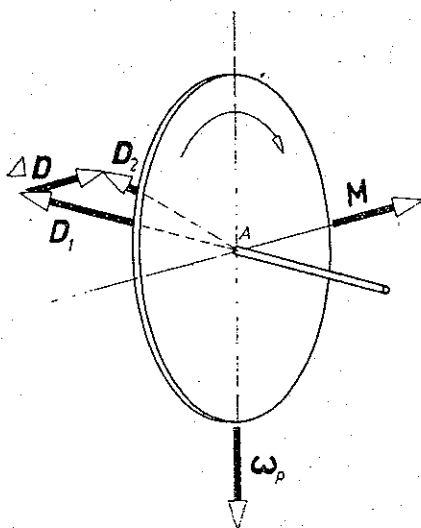


Fig. 6. Vecteur moment cinétique  $D$ , moment couple  $M$  et vecteur vitesse de précession  $\omega_p$  lors de l'expérience de précession.



La fig. 6 représente le vecteur couple  $\mathbf{M}$  ainsi que le vecteur moment cinétique  $\mathbf{D}_1$  par rapport au temps  $t_1$ . Au vecteur moment cinétique  $\mathbf{D}_1$  vient s'ajouter l'accroissement  $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{M} \Delta t$ , donc un vecteur qui a la même direction que le vecteur couple mais modifié dans sa grandeur du facteur  $\Delta t$ . En additionnant vectoriellement  $\mathbf{D}_1$  à  $\Delta\mathbf{D}$ , il en résulte le vecteur  $\mathbf{D}_2$ , qui indique le moment cinétique en grandeur et en direction après un temps  $t_1 + \Delta t = t_2$ . Comme après chaque intervalle successif de temps  $\Delta t$ , le même accroissement  $\Delta\mathbf{D}$  vient s'ajouter au vecteur moment cinétique, le mouvement gyroscopique, produit sous l'influence du couple  $\mathbf{M}$ , est constitué d'une rotation régulière autour de l'axe normal (axe zéro). Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}_p$  de la vitesse de précession forme avec le moment cinétique et le vecteur couple une spirale droite.

Le sens de direction de la précession peut être déterminé dans tous les cas par une règle facile à retenir. L'axe du couple sera ci-après désigné comme axe de rotation imposé, le couple essayant en effet d'imposer une rotation autour de cet axe. Retenons donc le théorème ci-après

**du parallélisme de même sens des axes de rotation** (appelé aussi: tendance au parallélisme des axes):

Un gyroscope, sous l'influence d'un couple ou d'une rotation imposée, cherche dans son comportement à placer son axe par le chemin le plus court, dans le même sens et parallèlement à l'axe de rotation imposée.

L'exactitude de cette règle des sens peut facilement se déduire des fig. 4 et 6. Le théorème indiqué n'est pas seulement valable lors d'une action d'un couple mais aussi dans le cas où on a imposé au gyroscope d'une manière quelconque une rotation. Ce théorème représente un outil important dans l'étude des phénomènes gyroscopiques et il est bon que son contenu soit rendu compréhensible par le raisonnement et par l'expérience. Lors de l'essai de précession exécuté précédemment, l'axe cinétique ne peut jamais atteindre le parallélisme de même sens à l'axe de rotation imposé, le poids étant entraîné pendant le mouvement de précession. Donc l'axe de rotation imposé effectue une dérive dans le même sens que l'axe cinétique, toutefois en le devançant de  $90^\circ$ .

### c) L'expression quantitative de l'expérience de précession

Nous voulons mieux approfondir les lois de la précession par des expériences. Visiblement la vitesse de précession dépend d'une manière décisive de la grandeur du couple qui agit sur le gyroscope. L'absence de couple donne une vitesse de précession nulle. Déjà à vue d'oeil on est convaincu que la vitesse de précession est d'autant plus grande que le poids posé sur le cadre intérieur est plus lourd, c.à.d. que le couple efficace sera plus grand.

Aussi n'existe-t-il aucune difficulté à suivre cette corrélation par des mesures. Nous relançons donc, dans ce but, le gyroscope et déposons un des deux poids additionnels de la paire N°1 sur le cadre intérieur. Puis, on mesure le temps nécessaire au cadre extérieur pour parcourir un angle déterminé (par ex. un quart de cercle). Immédiatement après, on déposera un des deux grands poids additionnels de la paire N°2 au même endroit du cadre intérieur et on mesurera encore une fois le temps mis pour parcourir le même espace angulaire déterminé. On constate que la vitesse de précession est proportionnelle au couple agissant et qu'elle augmente dans le rapport des poids appliqués.

En exécutant cette expérience, il faut veiller à ce que les deux mesures soient exécutées très rapidement l'une après l'autre, pour que la vitesse de rotation du gyroscope ne puisse pas chuter sensiblement pendant l'expérience. Pour la même raison, il est conseillé de ne pas choisir le déplacement angulaire à mesurer trop grand. Un déplacement de 90° est largement suffisant.

En relançant le gyroscope plus ou moins fortement et en employant toujours le même poids de précession, on peut montrer la dépendance de la vitesse de précession de la vitesse de rotation du gyroscope. La détermination de la vitesse de rotation s'effectue le plus facilement par comptage des nombres de tours réguliers de la manivelle d'entraînement. Cette mesure est aisément réalisable avec un peu d'entraînement. On lance, par exemple, d'abord fortement le gyroscope - un tour du maneton de la manivelle d'entraînement en une seconde - puis on mesure la vitesse de précession de la même manière que précédemment. On diminue, ensuite, la vitesse de rotation de moitié - un tour de maneton de la manivelle d'entraînement en deux secondes - et on répète l'expérience. On constate, les mesures étant exécutées avec grand soin, que par l'abaissement de la vitesse de rotation du gyroscope de moitié, la vitesse de précession augmente du double. D'une façon correspondante, la vitesse de précession augmente du triple, lorsque la vitesse de rotation du gyroscope a été réduite d'un tiers de la valeur d'origine. La vitesse de précession est donc inversement proportionnelle à la vitesse de rotation du gyroscope.

Si l'on désigne la vitesse de précession par  $\omega_p$ , le couple agissant sur le gyroscope par  $M$  et la vitesse de rotation du gyroscope par  $n$ , le résultat des expériences préalablement exécutées peut être résumé par la formule:

$$\omega_p = f \frac{M}{n} \quad (2)$$

Dans cette formule  $f$  est un facteur de proportionnalité qui pourrait être déterminé d'une façon plus précise par d'autres expériences. Toutefois, nous allons déterminer ici la valeur de  $f$  par un simple calcul en partant du théorème du moment cinétique déjà maintes fois cité:

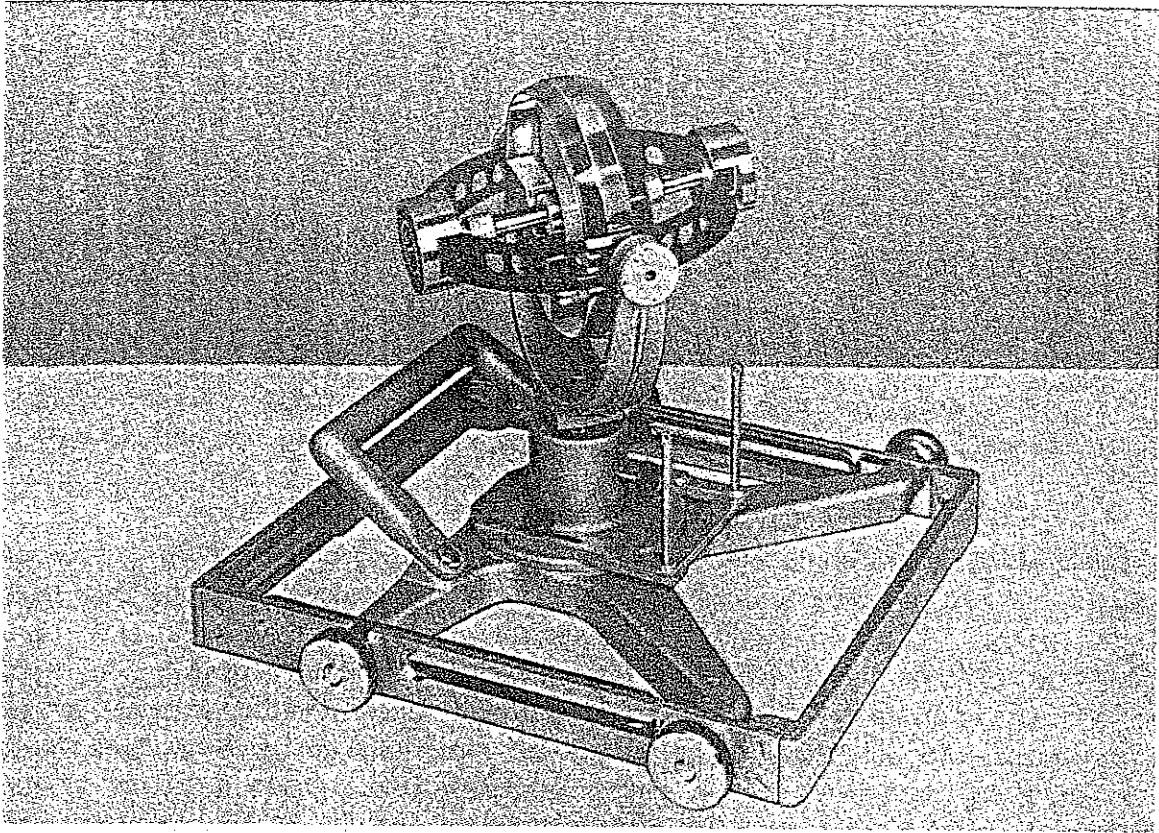


Fig. 7. Modèle de gyroscope avec poids additionnels.

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} = M$$

(Comme dans ce cas uniquement les valeurs des vecteurs présents nous intéressent, nous n'avons pas besoin de les faire figurer par des lettres en caractère gras!) Comme on peut le voir à partir de la fig. 6, l'angle  $\Delta\alpha$  parcouru par le vecteur moment cinétique et par là aussi par le gyroscope complet, peut s'écrire:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta D}{D} \text{ ou } \Delta D = D \cdot \Delta\alpha$$

En introduisant cette valeur dans la formule du théorème du moment cinétique, on obtient:

$$D \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = M .$$

Finalement le quotient  $\Delta\alpha/\Delta t$  (quotient de différence qui pour des temps  $\Delta t$  toujours plus petits devient en finale un quotient différentiel) n'est rien d'autre que la vitesse de précession  $\omega_p$  du gyroscope que nous recherchons. Nous trouvons donc:

$$\omega_p = \frac{M}{D} = \frac{30M}{\pi n J} \quad (3)$$

Dans ce cas, on a introduit pour le moment cinétique  $D$  la valeur  $D = J \omega = (2\pi n/60) J$  (Moment d'inertie  $J$  autour de l'axe de rotation fois la vitesse angulaire  $\omega$  du gyroscope). La formule (3) représente donc l'expression recherchée et définitive de la loi de précession, expression qui sera utilisée très souvent par la suite.

Nous remarquons, en passant, que d'après la formule (3) la vitesse de précession ne dépend pas de la grandeur du moment d'inertie équatoriale (autour des deux axes des cadres). Ce fait peut être facilement confirmé par l'expérience. Dans ce but, nous procédons à l'expérience de précession de la manière suivante: Nous fixons par vis une paire de poids additionnels aux deux endroits prévus à cet effet du cadre intérieur (fig. 7). La vitesse de précession obtenue après fixation d'un autre poids additionnel sur le cadre intérieur est comparée avec la vitesse de précession obtenue sans la paire de poids additionnels fixée précédemment. En exécutant correctement l'expérience (même vitesse de rotation, application correcte des poids additionnels) on ne constatera aucune différence.

## 2.2 Les mouvements de nutation

Un gyroscope soumis à aucun couple ne peut pas exécuter de mouvement de précession, car dans ce cas, la formule (3) donne une vitesse de précession nulle. Un tel gyroscope que l'on a l'habitude de désigner en général comme exempt de toute force (on devrait plutôt dire exempt de tout couple), peut malgré tout encore exécuter des mouvements qui lui sont propres et qui sont alors désignés par mouvements de nutation ou plus simplement par nutation tout court.

### a) La tenue d'un gyroscope exempt de toute force extérieure

Une nouvelle fois nous commençons par une expérience: Le gyroscope est mis légèrement en mouvement par lancement à la main en y retenant le cadre intérieur. Après libération avec précaution du cadre intérieur, l'axe du gyroscope conserve, une fois pour toutes, la position qu'il avait prise. Néanmoins, si on heurte soit le

cadre extérieur autour de l'axe extérieur de Cardan ou le cadre intérieur autour de l'axe intérieur de Cardan, le gyroscope exécute un mouvement de vascillement ou de tangage - c.à.d. précisément la nutation. L'axe du gyroscope se déplace dans ce cas sur la surface d'un cône dont le sommet est formé par le point fixe du gyroscope (point d'intersection des trois axes du système). Le sens de déplacement du cône est toujours identique à celui de la rotation du gyroscope.

Les nutations ne se produisent que par suite du concours des forces d'inertie et des forces gyroscopiques. Leur explication n'est pas simple. Toutefois, le théorème du moment cinétique nous aide à en comprendre une partie. Dans le cas du gyroscope exempt de forces, le théorème du moment cinétique (1) nous dit que la variation temporaire du moment cinétique est nulle par absence de couple. Si la variation est nulle, le moment cinétique lui-même ne doit subir aucune modification, c.à.d. être constant en grandeur et direction. Comme lors du mouvement de nutation l'axe de symétrie visible, - que nous allons désigner par la suite d'une façon usuelle comme l'axe de la figure du gyroscope -, décrit un cône, c'est précisément l'axe de ce cône qui va nous indiquer la direction fixe par rapport à l'espace du vecteur du moment cinétique. Lorsqu'aucune nutation n'a lieu l'axe cinétique et l'axe de la figure coïncident. Plus la percussion est grande, plus les cercles respectivement les ellipses, que l'axe de la figure décrit autour de l'axe cinétique fixe par rapport à l'espace, seront grands.

On peut maintenant montrer que le mouvement de nutation peut s'expliquer d'une façon très claire par le roulement de deux cônes l'un sur l'autre, et où l'un des deux est fixe par rapport à l'espace (cône de base ou cône d'herpolhodie) tandis que l'autre est en position fixe par rapport au corps gyroscopique (cône de révolution roulant ou cône de polhodie). L'axe du cône de révolution de base est l'axe cinétique, l'axe du cône de révolution roulant est l'axe de la figure. Deux cas représentés dans les figs. 8. et 9 peuvent se présenter. Ou bien le cône de révolution roulant fixe par rapport au corps roule extérieurement sur le cône de révolution de base, fixe par rapport à l'espace (fig. 8) ou bien le cône de révolution roulant circonscrit le cône de révolution de base et roule sur le plan intérieur de celui-ci (fig. 9). Le premier cas se présente avec le gyroscope "allongé", le deuxième cas avec le gyroscope "aplatis". Un gyroscope est appelé "allongé" lorsque le moment d'inertie autour de l'axe de la figure est plus petit que les moments d'inertie équatoriaux (Exemple: une ellipsoïde de révolution allongé cas limite: la barre). Un gyroscope est appelé "aplatis" lorsque le moment d'inertie autour de l'axe de la figure est plus grand que les moments d'inertie équatoriaux (Exemple: une ellipsoïde de révolution plate cas limite: le disque). Dans le cas du gyroscope sphérique se situant entre le gyroscope allongé et le gyroscope aplatis (cas où tous les moments d'inertie sont de même grandeur) le cône de révolution de base se réduit à une droite (axe cinétique).

La génératrice de contact commune aux deux cônes représente l'axe instantané de rotation, car autour de cet axe a lieu la rotation du cône de révolution roulant

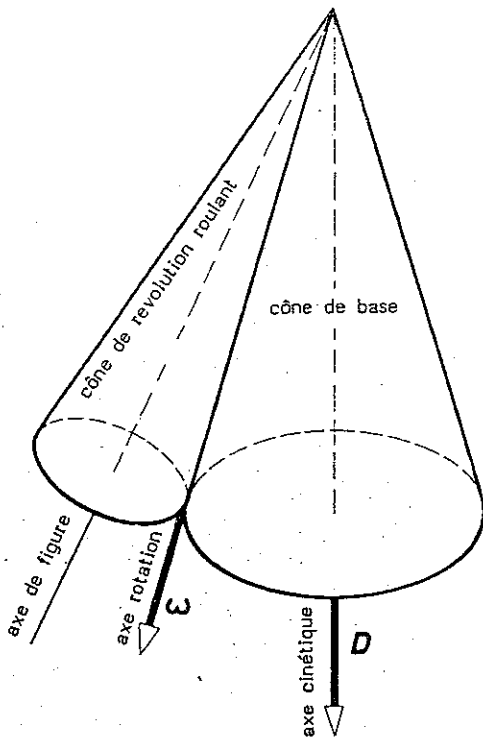


Fig. 8. Pour l'explication des mouvements de nutation dans le cas d'un gyroscope allongé.

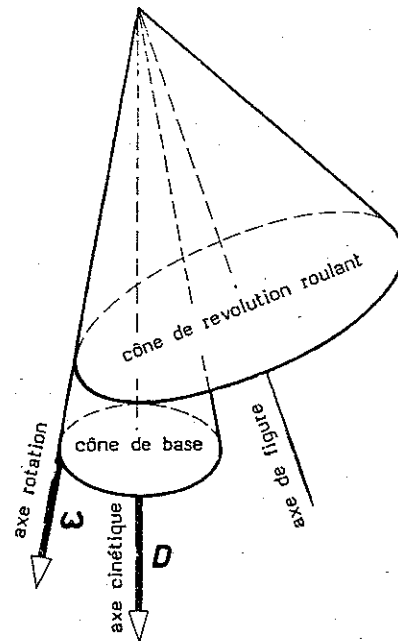


Fig. 9. Pour l'explication des mouvements de nutation dans le cas d'un gyroscope aplati.

(vu par un observateur immobile placé dans la pièce) ou celle du cône de révolution de base (vu par un observateur placé sur le gyroscope). L'axe de rotation danse aussi comme l'axe de la figure autour de l'axe cinétique fixe et ceci de telle façon que les axes de la figure et de rotation pour le gyroscope allongé se trouvent du même côté de l'axe cinétique tandis que dans le cas du gyroscope aplati l'axe cinétique se trouve entre-eux. Comme l'axe de rotation donc la génératrice de contact des deux cônes lors du roulement d'un cône sur l'autre progresse aussi bien sur la surface du cône de révolution de base que sur la surface du cône de révolution roulant, l'axe de rotation instantané change de position aussi bien dans le corps du gyroscope que dans la pièce. Nous allons plus tard les rendre visibles par une astuce ce qui nous permettra d'observer leur déplacement.

Les très belles et très représentatives figures qui nous ont été données notamment par Poinsot sur la nutation du gyroscope non soumis à des forces, ne peuvent pas être commentées en cet endroit. Toutefois, en ce qui les concerne nous vous renvoyons expressément aux livres d'enseignement sur les gyroscopes indiqués à la fin de cet ouvrage. Ceux qui désirent approfondir leur savoir sur l'origine des nutations ne doivent pas négliger de consulter ces livres et de corroborer leur lecture par des essais sur le gyroscope-modèle.

## b) L'expression quantitative du mouvement de nutation

Comme dans le cas des précessions, essayons aussi par des expériences d'éclaircir plus en détail les nutations. En premier lieu, nous allons chercher à montrer la dépendance des nutations de la vitesse de rotation du gyroscope. Pour ce faire, le gyroscope - sans poids additionnel - sera lancé modérément afin de pouvoir encore compter et chronométrer le nombre de rotation. On mesurera avec le chronomètre 10 tours du gyroscope, par exemple, et on chronométrera immédiatement après, le temps des 10 rotations des nutations. Les mesures devront être réalisées rapidement l'une derrière l'autre pour que la vitesse de rotation du gyroscope ne baisse pas, entre-temps, d'une façon trop sensible. A partir des valeurs mesurées, on calculera avec la méthode connue la vitesse de rotation (nombre de rotations du gyroscope en une minute) et la fréquence de nutation (nombre de révolutions de nutation).

Pour exécuter la mesure suivante, le gyroscope sera légèrement freiné et on mesurera, une nouvelle fois, le temps de 10 rotations du gyroscope et ensuite de 10 révolutions de nutation. Afin d'éliminer les sources d'erreur, il est conseillé d'effectuer plusieurs mesures l'une derrière l'autre et de prendre en final les moyennes des fréquences de nutation et des vitesses de rotation du gyroscope. Si on établit maintenant le rapport entre la fréquence de nutation et la vitesse de rotation du gyroscope, on trouve que ce rapport est indépendant de la grandeur absolue de la vitesse de rotation et conserve toujours la même valeur. En d'autres termes: Lorsque la vitesse de rotation du gyroscope varie, la fréquence de nutation se modifie toujours dans le même rapport. La fréquence de nutation est donc proportionnelle à la vitesse de rotation du gyroscope.

Nous renouvelons la même expérience mais en appliquant avant, aux points de suspension de l'axe du gyroscope sur le cadre intérieur, la paire de poids additionnel N°1. Là aussi, on établira pour les différentes grandeurs de la vitesse de rotation les rapports entre la fréquence de nutation et la vitesse de rotation du gyroscope. On retrouve que les valeurs des rapports sont indépendantes de la grandeur de la vitesse de rotation. Par contre, la valeur elle-même du rapport s'est modifiée par rapport aux premières expériences sans poids additionnel. Tandis que le rapport fréquence nutation/vitesse de rotation du gyroscope sans poids additionnel était nettement plus grand que un, il est devenu maintenant pratiquement égal à un. Si on renouvelle enfin la même expérience en y ajoutant cette fois-ci la paire de poids additionnel N°2, on trouve un rapport plus petit qu'un. Si on avait trouvé précédemment que la fréquence de nutation est proportionnelle à la vitesse de rotation du gyroscope, la nouvelle série d'expériences montre que le facteur de proportionnalité est dépendant du rapport des moments d'inertie et qu'il devient d'autant plus petit que les moment d'inertie équatoriaux par rapport au moment d'inertie axial deviennent plus grands.

Le calcul des fréquences de nutation donne en fonction de la vitesse de rotation du gyroscope  $n$ , du moment d'inertie axial  $J_z$  et des deux moments d'inertie équatoriaux  $J_x$  et  $J_y$ , la formule:

$$\omega_n = \frac{J_z}{\sqrt{J_x J_y}} \omega = \frac{J_z}{\sqrt{J_x J_y}} \frac{\pi n}{30} \quad (4)$$

Pour l'établissement de cette formule, on est prié, une nouvelle fois, de se reporter à la bibliographie correspondante. La formule ne s'applique strictement que dans le cas du gyroscope exempt de forces, c.à.d. libre de toute liaison. Toutefois, elle reste valable avec une approximation suffisante pour le cas du gyroscope assujéti dans la mesure où la vitesse de rotation ne devient pas trop petite. En particulier, cette formule peut pour cette raison être appliquée aux gyroscopes techniques.

Mais la formule (4) risque de fournir pour des gyroscopes à vitesse de rotation rapide également des fausses valeurs lorsque l'arbre du gyroscope est très mince, celui-ci pouvant fléchir pendant les mouvements de nutation. Par ce fléchissement élastique de l'arbre, les fréquences de nutation calculées suivant (4) sont d'autant plus réduites par rapport aux réelles que le moment cinétique du gyroscope est plus grand.

Nous en profitons pour faire remarquer que les moments d'inertie équatoriaux  $J_x$  et  $J_y$  se composent des moments d'inertie du disque gyroscopique (avec les poids disques) autour de l'axe transversal et des composantes des moments d'inertie des deux cadres de Cardan ainsi que de ceux des poids additionnels autour des deux axes de Cardan. Comme les composantes des cadres de Cardan par rapport aux moments d'inertie relatifs aux deux axes de Cardan sont de grandeurs différentes (le cadre extérieur, par exemple, ne contribue pas au moment d'inertie autour de l'axe de Cardan intérieur car il ne tourne qu'autour de l'axe de Cardan extérieur), les deux moments d'inertie équatoriaux  $J_x$  et  $J_y$  peuvent être de grandeurs différentes, malgré que le gyroscope lui-même continue à être symétrique et possède donc une ellipsoïde d'inertie de révolution symétrique.

### c) D'autres expériences sur le mouvement de nutation

Comme déjà dit précédemment dans un mouvement de nutation d'un gyroscope exempt de forces, l'axe de la figure et l'axe de rotation danse autour de l'axe du moment cinétique qui se trouve fixe par rapport à l'espace. Ce mouvement dansant de l'axe de la figure peut être observé directement sur le modèle. Pour permettre une visualisation des mouvements de l'axe de rotation instantané - c.à.d. la ligne qui relie tous les points qui sont précisément immobiles pendant un moment



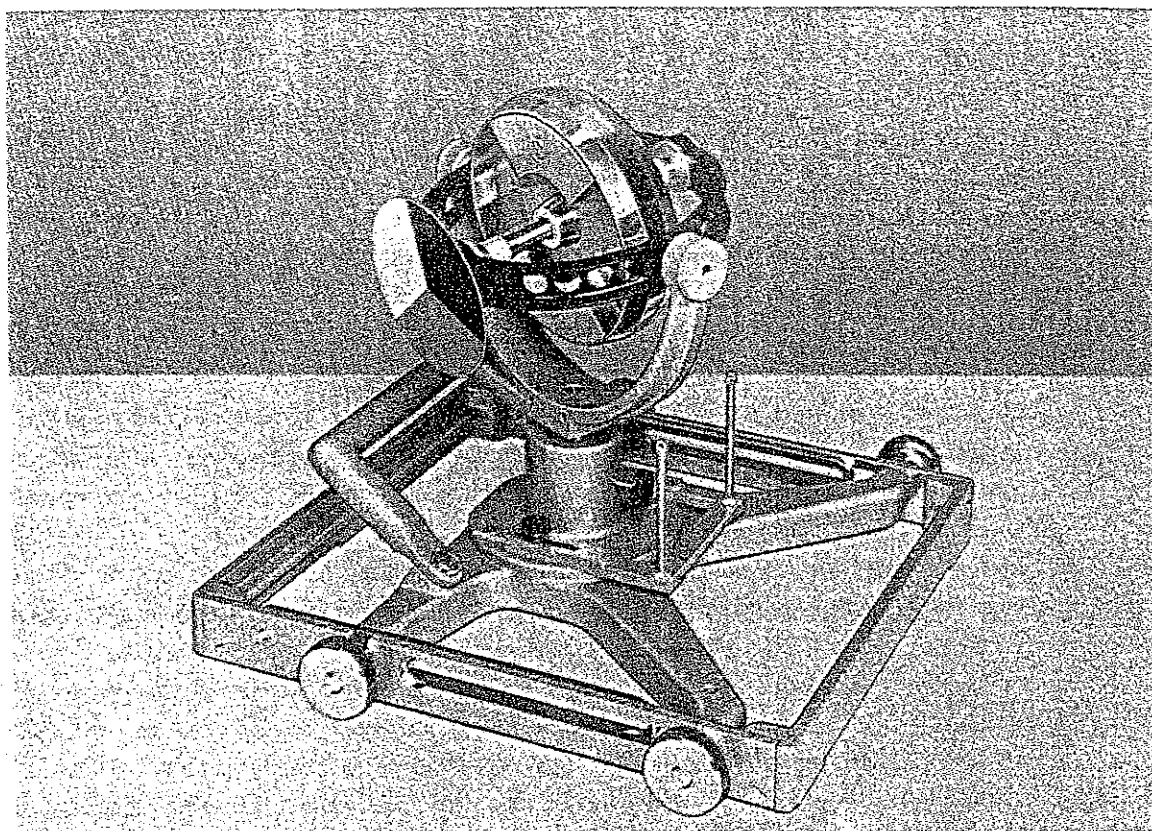


Fig. 10. Gyroscope-modèle avec disque de Maxwell.

déterminé -, nous allons utiliser le disque dit de Maxwell. Celui-ci est constitué d'un disque circulaire qui est subdivisé en trois secteurs colorés de façon différente. Ce disque est glissé sur une des deux extrémités de l'axe du gyroscope (fig. 10). Le disque participe alors aux rotations du gyroscope.

Avec un gyroscope tournant exempt de nutation, l'axe de rotation instantané est toujours confondu avec l'axe visible de la figure. Celui-ci passe par le centre du disque sur lequel les trois secteurs de couleur différente se touchent. Avec un gyroscope tournant modérément vite (lancé à la main) les couleurs du disque de Maxwell se fondent en un gris sombre régulier. Si maintenant on produit des nutations en percutant un des deux anneaux de Cardan on observe au centre du disque de Maxwell une tache nette issue d'une des trois couleurs (noir, rouge, blanc) du disque. Ce fait montre que l'axe de rotation instantané ne se confond plus avec l'axe de la figure, mais traverse quelque part la surface du disque, par ex. le secteur blanc. Pendant l'expérience la couleur reste nullement constante, elle passe plutôt plus ou moins rapidement d'une des trois couleurs à l'autre. L'expérience démontre donc le fait déjà cité précédemment à savoir que l'axe de rotation instantané se promène dans le gyroscope. Le sens de rotation peut se déterminer en fonction de l'ordre des passages de couleur. Si l'expérience est effectuée sans poids additionnels sur le cadre intérieur, l'alternance des couleurs se fait très rapidement de sorte qu'un

oeil non entraîné peut difficilement la reconnaître. Pour cette raison, nous recommençons l'expérience une nouvelle fois, mais déposons avant sur le cadre intérieur à l'extrémité de l'axe de la figure opposée au disque un des petits poids additionnels. Le gyroscope est évidemment plus exempt de forces étant soumis par suite d'une charge unilatérale à un couple de gravité. Toutefois, le mouvement de précession ainsi produit ne perturbe pas spécialement l'exécution de l'expérience. Après lancement du gyroscope on redonne naissance, d'une façon connue, à des nutations. Le changement de couleur dans la partie centrale du disque de Maxwell s'effectue maintenant dans le même sens comme lors de l'expérience sans poids additionnel sur le cadre intérieur, mais nettement plus lentement. Nous pouvons donc facilement constater que dans le cas présent, où l'ellipsoïde d'inertie du gyroscope est aplati, le sens de rotation de l'axe de rotation dans le gyroscope correspond au sens de rotation du gyroscope. Ceci se laisse aussi déduire de la fig. 9 déjà précédemment traitée et qui concernait précisément un gyroscope aplati. Si le cône de révolution roulant fixe par rapport au corps se déroule sur le cône de révolution de base, fixe par rapport à l'espace, la génératrice de contact des deux cônes, c.à.d. l'axe de rotation, se déplace sur l'enveloppe du cône de révolution roulant dans le même sens de rotation que l'axe de la figure. La vitesse de déplacement de l'axe de rotation sur l'enveloppe du cône de révolution roulant dépend de l'angle au sommet du cône de révolution de base. Plus l'angle au sommet sera petit, moins vite s'effectuera la révolution de l'axe de rotation. Dans le cas du gyroscope sphérique, l'angle au sommet du cône de révolution de base devient enfin nul. Dans ce cas l'axe de rotation doit être fixe par rapport au corps (cône de révolution roulant). Son axe coupe le plan du disque toujours au même endroit de sorte que l'on observe continuellement une seule couleur. Ce cas peut être réalisé d'une façon approximative, en fixant la petite paire de poids. Pour ce faire on doit d'abord enlever le disque de Maxwell. On place, ensuite, les deux poids et on refixe le disque comme précédemment. En exécutant l'expérience, on n'obtiendra pas d'arrêt total du point de traversée de l'axe de rotation sur le disque, en effet celui-ci effectuera un très léger déplacement. Ceci provient de l'agrandissement des moments d'inertie produit par le disque. Sans disque, l'ellipsoïde d'inertie du gyroscope serait une sphère. Mais comme le disque apporte une part plus importante aux moments d'inertie équatoriaux qu'au moment d'inertie axial, l'ellipse d'inertie sera légèrement "allongé". En fait, il n'est pas difficile de réaliser exactement le cas du gyroscope sphérique par apposition de masses additionnelles adéquates. Le meilleur réglage fin est obtenu par de la plastiline. En observant le changement de couleur, on constate que dans le cas du gyroscope allongé le sens de révolution de l'axe de rotation dans le corps est opposé au sens de rotation du gyroscope. Ce fait se laissait également déduire de la figure 8 qui précède. Si on fixe maintenant un des poids additionnels 2 sur le cadre intérieur, la révolution de l'axe de rotation s'effectue encore plus rapidement car l'ellipsoïde d'inertie est encore plus allongé. Si cette expérience nous a donné un aperçu sur le sens de révolution de l'axe de rotation dans le gyroscope, la prochaine expérience nous fixera plus particulièrement sur le temps de révolution de l'axe de rotation sur la surface de l'enveloppe du cône de révolution roulant.

Nous utiliserons pour ce faire un gyroscope symétrique balourdé. Les poids-disques seront fixés sur le disque gyroscopique tel que le montre la figure 76. Le gyroscope possède par là un balourd dit dynamique car son axe d'inertie principal n'est plus confondu avec l'axe de la figure. Les poids additionnels et le disque de Maxwell sont au départ retirés lors de cette expérience. Puis les cadres à Cardan seront retenus et le disque gyroscopique sera lancé à la main. Après la libération des cadres le gyroscope amorce une nutation mais s'immobilise par lui-même après un certain temps puis recommence tout de suite après une nouvelle fois les mêmes mouvements. L'axe de la figure visible, - qui maintenant, à l'inverse des expériences précédentes, n'est plus axe d'inertie principal - était au début de l'expérience aussi axe de rotation, les cadres ayant été retenus à ce moment. Mais dès leur libération, l'axe de rotation commence à se déplacer dans le gyroscope; l'axe de la figure sera en conséquence éjecté autour. Si l'axe de rotation se rapproche de nouveau de l'axe de la figure pendant sa révolution sur la surface du cône de révolution roulant, les mouvements s'amortissent et finalement viennent à s'arrêter complètement lorsque l'axe de rotation coïncide de nouveau avec l'axe de la figure. Le temps entre deux arrêts du gyroscope correspond donc au temps de révolution de l'axe de rotation sur le cône de révolution roulant. L'axe de la figure visible est uniquement caractérisé dans cet expérience par le fait qu'il a aussi été au début de l'expérience axe de rotation. Il est en quelque sorte une génératrice enveloppante du cône de révolution roulant.

Nous renouvelons la même expérience en ajoutant toutefois, la paire de poids additionnel N°1 sur le cadre intérieur. Le mouvement de l'axe de la figure devient maintenant beaucoup plus sauvage que dans l'expérience précédente. Primo, la plus grande déviation de l'axe de la figure par rapport à la position horizontale est nettement plus élevée, secundo le temps mis pour le retour au repos est plus long. Nous pouvons en conclure que l'angle au sommet du cône de révolution roulant dépend du rapport des moments d'inertie, car la déviation la plus grande de l'axe de la figure correspond exactement à l'angle au sommet du cône de révolution roulant comme on peut facilement le visualiser sur les figures 8 et 9. D'autre-part, l'expérience nous confirme que la vitesse de révolution de l'axe de rotation sur l'enveloppe du cône de révolution roulant est d'autant plus faible que l'ellipsoïde d'inertie du gyroscope se rapproche plus d'une sphère.

Rigoureusement parlant, ces mouvements ne représentent pas des purs mouvements de Poinso, car la masse additionnelle ainsi que les deux cadres à Cardan ne participent pas à la rotation complète du gyroscope mais seulement aux rotations produites autour des axes de Cardan. On doit être très prudent en transposant les considérations de Poinso aux mouvements du modèle.

Pour compléter les connaissances, nous exécutons encore l'expérience avec la paire de poids additionnels N°2. La vitesse de révolution de l'axe de rotation, - c.à.d. le temps entre deux arrêts de l'axe de la figure - est encore devenue plus petite.

De la même manière la plus grande déviation de l'axe de la figure est aussi réduite pendant le mouvement de nutation.

### 2.3 La précession pseudo-régulière

Les nutations et les précessions peuvent se superposer réciproquement. Chez des gyroscopes tournant à vitesse relativement rapide, leurs oscillations réciproques possèdent des fréquences tellement différentes que l'on peut facilement les distinguer. Uniquement avec des gyroscopes tournant très lentement, l'addition de la nutation et de la précession produit des mouvements de tangage bizarres dont l'étude n'est pas aisée.

Toutefois, l'action conjuguée de la nutation et de la précession est importante pour une meilleure compréhension des expériences de précession décrites dans le chapitre 2.1. Lors d'une expérience, nous y avons constaté que le gyroscope ne cède pas, le couple y étant appliqué mais qu'il y échappe verticalement, exécutant donc une précession. Cette constatation nécessite une analyse plus approfondie. Pour cette raison, nous exécutons une nouvelle expérience de précession en opérant de la manière suivante: Le gyroscope est mis en rotation modérément par lancement à la main. En retenant le cadre intérieur, on fixe un des poids additionnels. Puis, on libère, subitement, le cadre intérieur en évitant d'exercer un choc sur le système. En observant bien, on constatera qu'en effet l'axe du gyroscope cède légèrement pendant les premiers instants au couple agissant. Mais en cédant, il y a formation de forces gyroscopiques qui font dévier l'axe gyroscopique de la direction première du mouvement. L'action conjuguée des forces de gravité et des forces gyroscopiques produit un mouvement tel que les points extrêmes de l'axe gyroscopique décrivent une trajectoire identique à celle représentée sur la figure 11 (cycloïdes à points de rebroussement).

Fig. 11. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope lors de la libération sans provoquer de chocs.



Nous modifions maintenant légèrement les conditions de l'expérience: Nous soumettons le gyroscope au début de l'expérience, c.à.d. lors de la libération du cadre intérieur, à un léger choc dirigé vers le bas. La trajectoire décrite par les points extrêmes de l'axe prend, dans ce cas, une des formes illustrées par la fig. 12 (cycloïdes à boucle, lemniscate). Si on soumet par contre, le gyroscope lors de sa libération

à un choc en direction du mouvement attendu de la précession, on obtient suivant l'importance du choc, des courbes de trajectoire représentées sur la fig. 13 (cycloïdes à ondes).

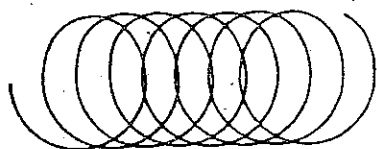


Fig. 12. Courbes de trajectoire du sommet du gyroscope lors de sa libération avec choc en direction de la pesanteur.

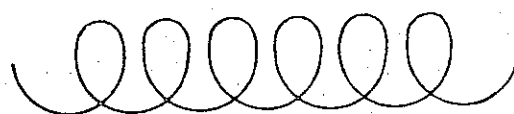


Fig. 13. Courbes de trajectoire du sommet du gyroscope lors de sa libération avec choc en direction du mouvement de précession.

Manifestement, il existe une grandeur et une direction bien déterminées du choc initial pour lesquelles la nutation se trouvant au-dessus de la précession disparaît, donc pour lesquelles l'amplitude des ondes des courbes de la fig. 13 est nulle. Dans ce cas, il se produit donc un mouvement de précession non perturbé par une nutation et que l'on désigne par **précession régulière**.

Plus le gyroscope tournera vite, plus réduites seront les petites nutations au dessus de la précession régulière. Pour des gyroscopes tournant très rapidement, elles sont

à peine visibles à l'oeil nu. Malgré que les conditions initiales ne coïncident plus avec celles nécessaires à l'obtention de la précession régulière, le gyroscope semble exécuter une précession régulière, donc un mouvement libre de nutation. Pour cette raison ces mouvements sont appelés: **précession pseudo-régulière**. Dans le cas des gyroscopes techniques, tournant rapidement, la distinction entre précession régulière et pseudo-régulière n'a aucune importance. Mais, vu du point de vue théorique, ce fait n'est pas à négliger, car il démontre que l'on doit être circonspect quand on affirme "qu'un gyroscope est insensible à l'application d'un couple".

## 2.4 La tranquillité de marche du gyroscope symétrique

La connaissance des lois de la nutation nous permet de comprendre une expérience très importante concernant la tranquillité de marche du gyroscope et dont il faut tenir compte lors de la construction d'appareils gyroscopiques. Néanmoins, pour son explication, il est nécessaire de faire quelques observations générales.

Lorsqu'un système pouvant osciller est soumis à des forces perturbatrices périodiques, produisant des oscillations, les déviations sont d'autant plus grandes que la fréquence d'excitation concorde plus exactement avec la propre fréquence du système. En cas de concordance complète de la fréquence d'excitation et de la propre fréquence du système, on parle de **résonance**. On craint énormément de tels phénomènes de résonance en technique, car ils peuvent souvent produire des surcontraintes dans les pièces mécaniques et provoquer même leur rupture. On les évite en choisissant la fréquence propre au système telle que celle-ci s'écarte le plus possible des fréquences perturbatrices qui pourraient se présenter.

Aucun gyroscope est parfait! Soumis à des défauts de matières et d'usinage, chaque gyroscope possède en soi des balourds résiduaux qui ne peuvent jamais être éliminés complètement même par un équilibrage ultérieur aussi bon soit-il. Il reste donc toujours un certain balourd résiduaire qui exerce lors de la rotation du gyroscope des forces perturbatrices périodiques, resp. couples perturbateurs sur le système dans lequel le gyroscope est incorporé. Ces forces perturbatrices correspondent toujours à la fréquence de la rotation du gyroscope.

Après ce qui a été dit précédemment, il faut éviter la concordance de la propre fréquence et de la fréquence d'excitation de l'érecteur pour éviter les résonances. Comme dans le cas présent on prend en considération avant tout la fréquence de nutation en tant que propre fréquence et, à cause des balourds, la fréquence de révolution en tant que fréquence d'excitation, il faut donc éviter une concordance des fréquences de nutation et de révolution du gyroscope. Pour la fréquence de nutation  $\omega_n$  la formule (4) (suivant laquelle  $\omega_n$  est proportionnelle à la fréquence

de révolution du gyroscope  $\omega$  et où le facteur de proportionnalité est uniquement dépendant du rapport des moments d'inertie) est applicable. Dans le cas du gyroscope sphérique le facteur est égal à un, de sorte que (4) devient simplement:

$$\omega_n = \omega.$$

Mais voilà justement le cas que nous voulions éviter car il conduit à une concordance de la propre fréquence et de la fréquence de l'érecteur.

Après ces préalables, exécutons d'abord l'expérience proprement dite. Pour ce faire, nous utiliserons le gyroscope précédent dans sa forme originale, sans aucun poids additionnel sur le cadre intérieur. Après avoir lancé le gyroscope avec la manivelle d'entraînement, on observe pratiquement pas de secousses. Le gyroscope tourne tranquillement. La tranquillité de marche est dans l'ensemble indépendante de la vitesse de rotation. Seulement dans le cas d'un gyroscope tournant très rapidement, on peut percevoir des oscillations inévitables dues aux balourds résiduels, sur la plaque de base de l'appareil. Dans le cas présent, l'ellipsoïde d'inertie est aplati. Le facteur de l'équation (4) est plus grand que un, donc la fréquence de nutation est plus grande que la fréquence de révolution du gyroscope (plage sous-critique).

En exécutant maintenant la même expérience après avoir fixé par vis la paire de poids N°1, le gyroscope amorce des oscillations forcées d'amplitude importante, même s'il n'a pas été soumis précédemment à des chocs. Ces oscillations peuvent dans le cas de gyroscopes tournant très rapidement, conduire à la destruction de l'appareil. Il est donc judicieux de ne pas lancer le gyroscope trop fortement. L'existence d'une résonance pour toutes les vitesses de rotation peut facilement être démontrée. Ce fait est très important! Tandis qu'habituellement on s'attend à avoir des phénomènes de résonance uniquement à certaines vitesses de rotation, nous trouvons ici en présence d'un phénomène de résonance indépendant de la vitesse de rotation quelque soit le choix de celle-ci. Ceci n'est possible que si la propre fréquence est proportionnelle à la vitesse de rotation ce qui est effectivement le cas dans la nutation.

Enfin, il est facile de se rendre compte que le gyroscope du type "allongé" tourne de nouveau tranquillement. A cet effet, on fixe les poids additionnels N°2 sur le cadre intérieur ce qui augmentera les moments d'inertie  $J_x$  et  $J_y$ . Le facteur dans l'équation (4) deviendra par là plus petit que un produisant ainsi des nutations plus lentes que les rotations du gyroscope. Le phénomène de résonance a maintenant disparu, le gyroscope retrouve sa tranquillité de marche.

Remarquons que cette expérience est en corrélation étroite avec les expériences concernant le gyroscope balourdé du chapitre précédent, où nous avons aussi des

amplitudes du système particulièrement importantes (grande ouverture d'angle du cône de révolution tournant!), lorsque le gyroscope avait un ellipsoïde d'inertie proche de la sphère.

D'autre-part, il faut mentionner que les conditions se modifient légèrement lorsque le gyroscope possède un arbre élastique qui peut céder légèrement pendant des mouvements de nutation. Dans ce cas, la formule (4) perd sa stricte validité et au contraire la fréquence de nutation devient plus petite que la formule (4) le laissait prévoir. Des analyses plus approfondies de ce cas peuvent être trouvées dans des travaux cités sous le N°7 du sommaire bibliographique.

## 2.5 La pendule gyroscopique

Un gyroscope, dont l'axe est assujéti à une position d'équilibre déterminé de telle façon que cet axe recherche toujours a retourné après déviation de sa position d'équilibre vers sa position d'origine est désigné par gyroscope pendulaire ou encore par pendule gyroscopique. Cet assujettissement n'est efficace que pour des mouvements autour des deux axes de Cardan; il n'empêche point les mouvements du gyroscope autour de son axe de rotation. Un tel assujettissement peut être effectué soit par des ressorts souples ou pour un axe de gyroscope en position verticale par un couple de gravité.

### a) Assujettissement par ressorts

Nous suspendons entre les petits anneaux placés au cadre intérieur et extérieur à Cardan, sur un côté quelconque de l'axe de Cardan intérieur un couple de ressort qui assujéttit élastiquement le cadre intérieur par rapport au cadre extérieur. D'autre-part, une autre paire de ressort est suspendue entre le cadre extérieur et les tiges verticales fixées sur le socle (fig. 14). Ce couple de ressort assujéttit le cadre à Cardan extérieur par rapport au socle. Les deux couples de ressort, ensemble, produisent un assujettissement élastique de l'axe gyroscopique à la position d'équilibre de sorte que le système forme un pendule gyroscopique.

Le gyroscope est maintenant lancé, puis écarté de sa position d'équilibre. Il exécute un mouvement de précession dans lequel l'axe gyroscopique tourne autour de sa position d'équilibre en effectuant une trajectoire elliptique. L'explication de cette expérience est très simple. L'assujettissement recherche à ramener le gyroscope dans sa position d'équilibre et exerce ainsi un couple. Le gyroscope réagit à ce couple avec une précession qui lui fait faire une dérive perpendiculaire à la direction du couple agissant. Si l'axe gyroscopique arrive à la suite de cette précession à



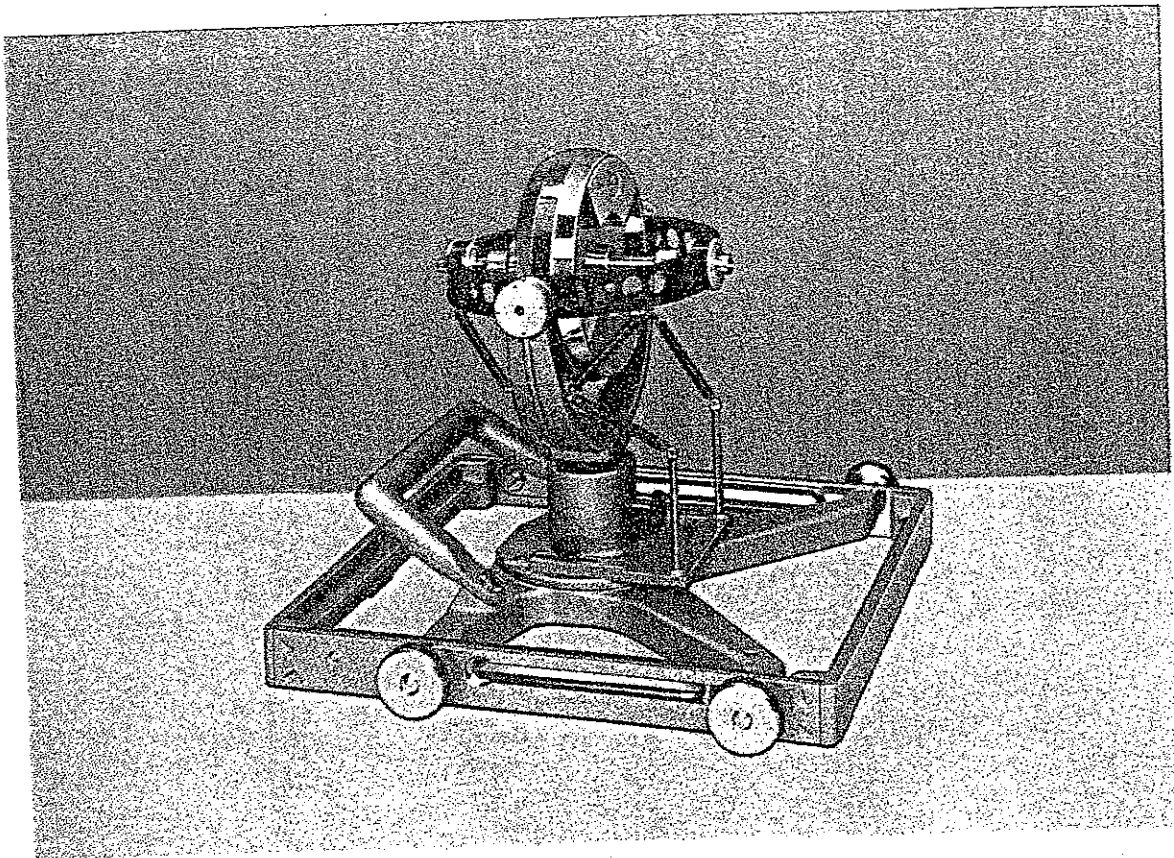


Fig. 14. Gyroscope-modèle avec assujettissement par ressorts.

un autre lieu de sa trajectoire, la direction du couple est, elle aussi, modifiée, et de ce fait la direction de la précession sera également modifiée. La trajectoire de précession du gyroscope est courbe et se ferme en une figure généralement elliptique. Si les paires de ressorts accrochées assujettissaient les deux cadres à Cadran avec la même force, la trajectoire de la précession se transformerait en un cercle. La trajectoire du cas présent est parcourue dans le sens contraire de la rotation du gyroscope. Le pendule gyroscopique peut, en outre, exécuter des nutations qui par rapport au cas du gyroscope libre, sont peu modifiées. Chez elles, l'axe gyroscopique parcourt le plus souvent aussi une trajectoire elliptique mais toujours dans le sens de rotation du gyroscope.

Les nutations et les précessions peuvent se superposer mutuellement. Le mouvement d'ensemble se compose alors de deux oscillations elliptiques qui parcourent leurs trajectoires en sens opposés. Dans le cas de gyroscopes tournant relativement rapidement on peut, en effet, distinguer les deux oscillations propres du pendule gyroscopique à cause de leurs fréquences nettement différentes. Néanmoins, pour un gyroscope tournant lentement, l'image devient très floue. Le gyroscope paraît alors exécuter des mouvements complètement arbitraires qui, chaque fois, suivant les conditions

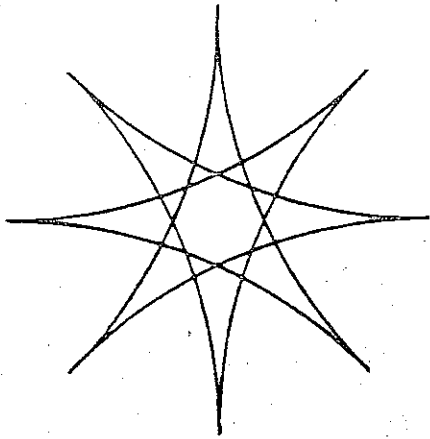


Fig. 15. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope après libération sans choc à partir d'une position perturbée.

Fig. 16. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope après libération avec choc en direction de la pesanteur.

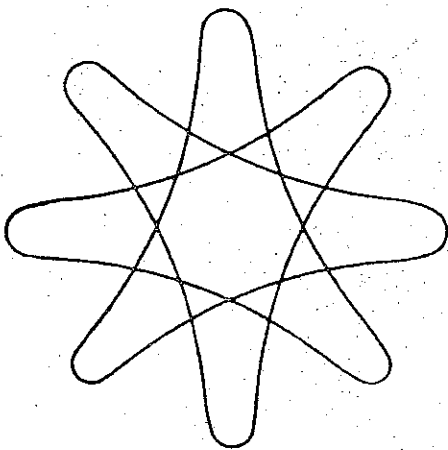
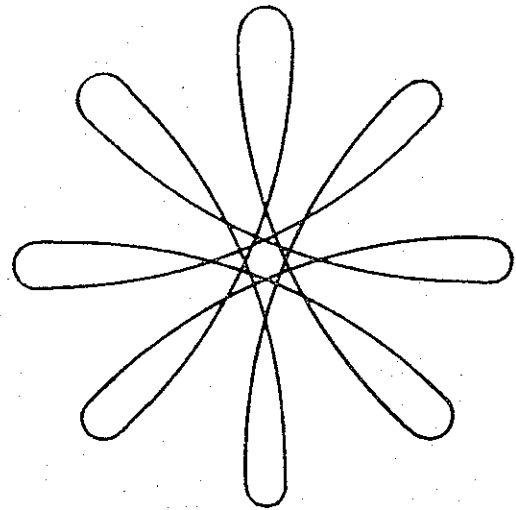


Fig. 17. Courbe de trajectoire du sommet du gyroscope après libération avec choc en direction du mouvement de précession.

initiales, sont différentes. Ainsi l'axe gyroscopique décrit lors d'une libération sans choc à partir d'une position écartée de la position d'équilibre une rosette à pointes comme montrée sur la fig. 15. Pour d'autres conditions initiales il se forme des courbes de trajectoire de la forme indiquée sur les figures 16 et 17.

### b) Assujettissement par un couple de gravité

Les mêmes expériences telles qu'elles viennent d'être faites avec des ressorts peuvent aussi être exécutées avec un assujettissement à l'aide d'un couple de gravité. A cet effet, nous devons amener l'axe du cadre extérieur en position horizontale. En outre, le centre de gravité du système est déplacé en dehors du point d'intersection des trois axes du système en appliquant sur un côté de l'axe gyroscopique, sur le cadre intérieur, un poids additionnel. La fig. 18 montre l'appareil préparé pour les expériences qui vont suivre. Lorsque le gyroscope est immobile, le couple de gravité cherche toujours à tirer l'axe du gyroscope de nouveau vers la position d'équilibre verticale. Lorsque le gyroscope est en marche, l'axe exécute un mouvement de précession, qui, cette fois, fait parcourir aux points de l'axe gyroscopique des trajectoires circulaires. Ceci s'explique simplement par l'assujettissement de force régulière du système autour des deux axes de Cardan. Car, il faut noter que la distance au centre de gravité est la même pour les deux axes de Cardan. Le sens de la rotation, avec lequel est parcouru la trajectoire circulaire, est contraire à celui de la rotation du gyroscope.

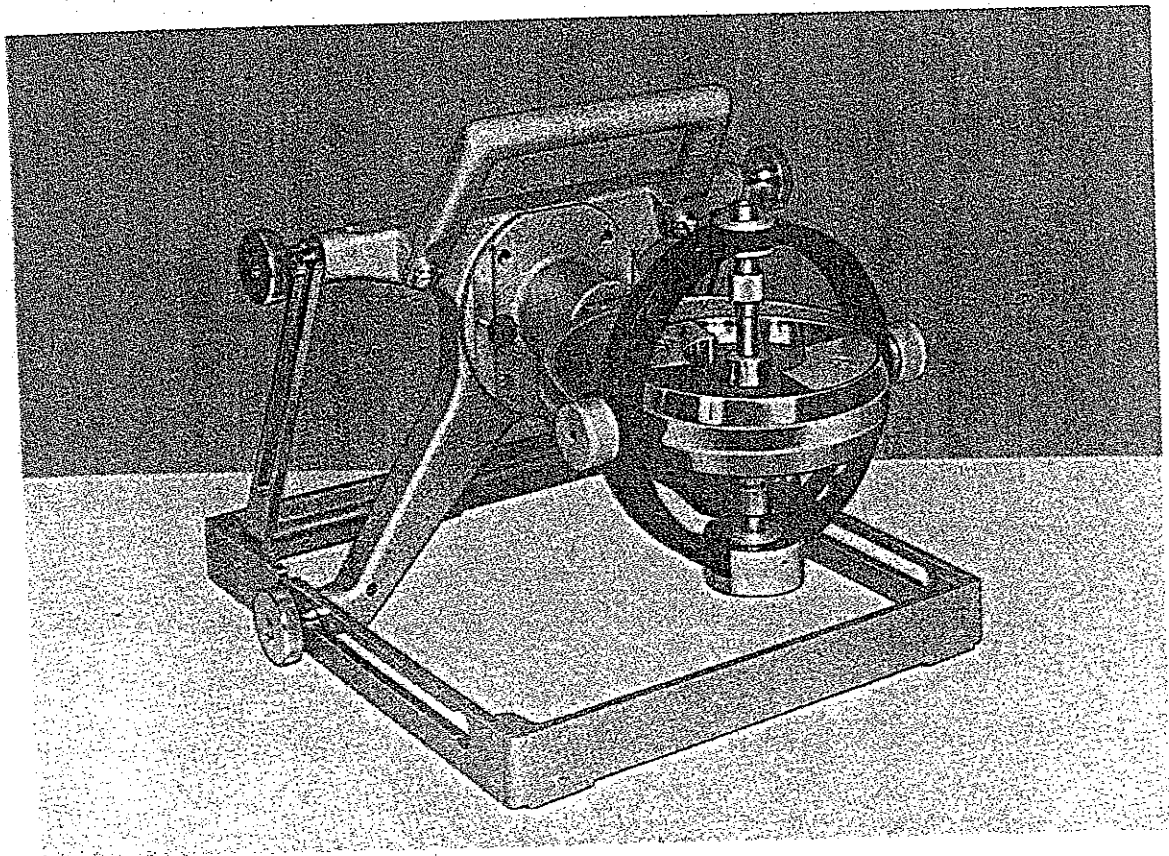


Fig. 18. Pendule gyroscopique avec assujettissement par gravité, poids dans le bas.

L'axe gyroscopique a reçu par la suspension du poids, deux positions d'équilibre. L'une où le poids se trouve dans le bas est statiquement stable car le système cherche à revenir même dans le cas d'un gyroscope immobile dans sa position d'équilibre. La deuxième position d'équilibre est cependant statiquement instable. Dans cette position, le centre de gravité se trouve au-dessus du point de soutien, le poids est donc au-dessus. Le gyroscope immobile peut effectivement rester dans cette position d'équilibre en cas d'équilibre parfait, toutefois la plus petite perturbation le renverse et le fait osciller vers la position d'équilibre basse, statiquement stable.

Nous lançons maintenant le gyroscope et amenons l'axe en direction verticale, de sorte que le poids est en haut. Après libération, le gyroscope reste donc dans la position d'équilibre instable précédente. Même avec de petites perturbations, il ne tombe pas, mais danse autour de sa position d'équilibre en effectuant des cercles de précession plus ou moins grands (fig. 19).

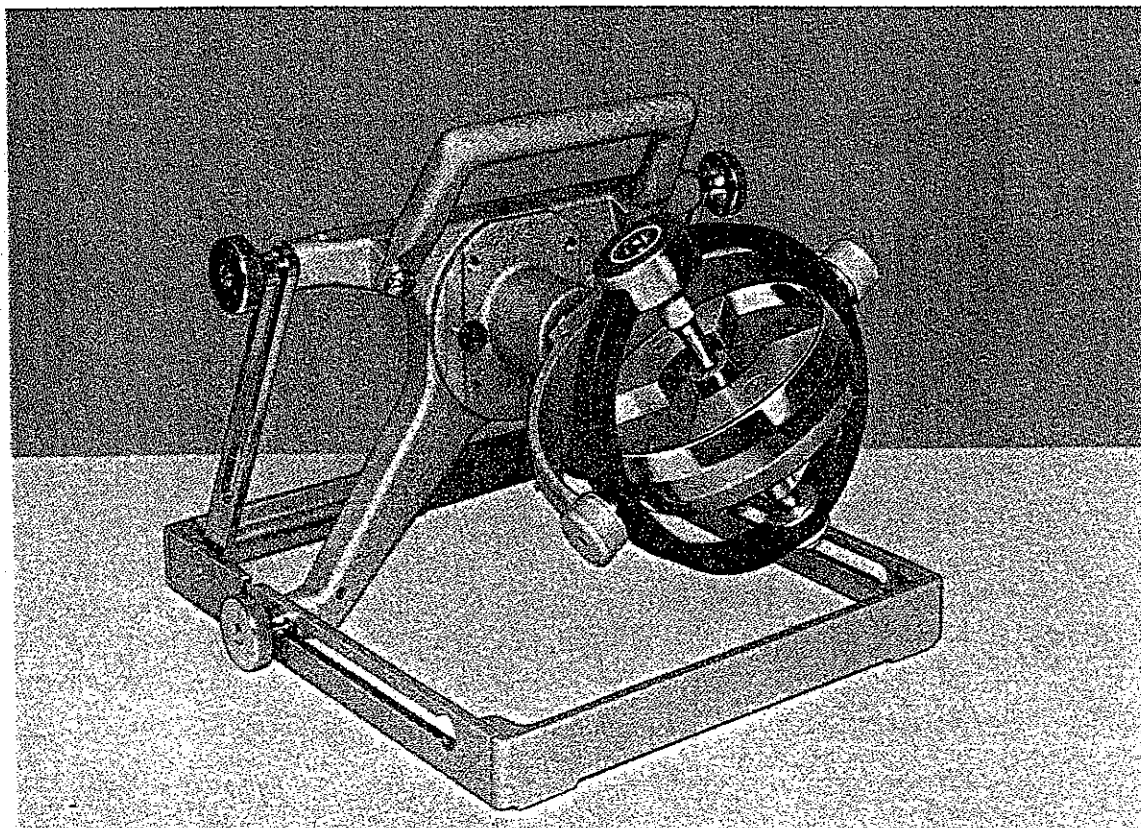


Fig. 19. Pendule gyroscopique avec assujettissement par gravité, poids en haut.

La position d'équilibre est devenue stable grâce au gyroscope en marche. On dit aussi dans ce cas que le gyroscope est en position d'équilibre dynamiquement stable. Comme le montre notre expérience: la possibilité, qu'une position d'équilibre statiquement instable devienne dynamiquement stable, existe. Le gyroscope doit évidemment tourner suffisamment vite pendant l'expérience pour que la position d'équilibre supérieure statiquement instable devienne dynamiquement stable. Si le gyroscope tourne trop doucement, il ne peut plus exécuter sa précession stable autour de la position d'équilibre supérieure et il bascule. La position d'équilibre inférieure est stable aussi bien statiquement que dynamiquement.

Le mouvement de précession s'effectuant autour de la position d'équilibre supérieure s'exécute toujours dans le même sens que la rotation du gyroscope. Nous pouvons constater en général qu'avec un assujettissement statiquement stable (position d'équilibre inférieure) le sens de précession et le sens de rotation sont opposés, par contre avec un assujettissement statiquement instable (position d'équilibre supérieure) les deux sont de même sens. On peut naturellement aussi provoquer par percussions des nutations dont le sens du parcours sera toujours celui de la rotation du gyroscope que ce soit un assujettissement statiquement stable ou un statiquement instable.

D'autre-part, les expériences nous permettent aussi de mesurer l'influence des frottements dans les suspensions à la Cardan. A cet effet, nous laissons parcourir au gyroscope son cône de précession pendant un temps assez long, le poids accroché dans le bas. On observe alors que l'ouverture du cône devient toujours plus petite, donc que les amplitudes de précession s'estompent. Le même essai exécuté avec le poids en position haute montre que les amplitudes de précession deviennent plus grandes. Le frottement des suspensions agit donc dans les deux cas dans un sens différent. On peut facilement démontrer en agrandissant l'effet du frottement que la diminution resp. l'agrandissement de l'angle du cône de précession provient effectivement des frottements. A cet effet, nous enfilons les brosses d'amortissement (fig. 78) sur le cadre extérieur pour que les brosses frottent sur le pied de l'appareil. L'influence du frottement ainsi amplifié a pour effet un amortissement resp. un agrandissement nettement plus rapide de l'amplitude de précession. Ces considérations ne sont toutefois valables que pour un gyroscope avec suspension à la Cardan. On ne doit pas généraliser, car, comme nous allons le montrer ultérieurement, les effets du frottement dans le cas de la toupie statiquement instable provoquent précisément l'effet contraire.

Donc, dans les deux cas, aussi bien pour l'assujettissement statiquement stable que pour celui statiquement instable du système autour des deux axes de Cardan, le gyroscope peut exécuter une précession stable autour de sa position d'équilibre. Ceci a été une des connaissances acquise par les expériences. Mais que se passe-t-il lorsque l'assujettissement est certes statiquement stable autour d'un des axes de Cardan mais statiquement instable autour de l'autre axe? L'expérience permettra de répondre à cette question. Nous resuspendons entre le cadre extérieur et les

tiges verticales une paire de ressorts dont la force a été déterminée telle que le système avec le poids situé en haut soit de nouveau stable autour de l'axe de Cardan extérieur (par ex. Paire de ressort N°4). Le gyroscope continue maintenant certes à rester par lui-même en position d'équilibre supérieure, pendant un certain temps mais à la moindre perturbation, il exécute un mouvement de précession (d'ailleurs sur une trajectoire hyperbolique) en s'écartant de la position d'équilibre et il va culbuter vers le bas. La position d'équilibre n'est donc plus dynamiquement stable. Une telle position d'équilibre mixte, statiquement stable dans une direction, statiquement instable dans l'autre peut aussi être obtenue par la seule action d'un couple de gravité si les deux axes de Cardan ne se coupent pas en un point. Ce cas peut souvent se présenter dans des pendules gyroscopiques techniques. Si, en outre, le centre de gravité du système se trouve entre les deux axes de Cardan, donc au-dessus de l'un, toutefois en dessous du deuxième axe de Cardan, l'assujettissement est effectivement statiquement stable dans une direction et statiquement instable dans l'autre. Si on veut éviter avec certitude la plage instable, on doit ou bien déplacer le centre de gravité suffisamment loin le long de l'axe gyroscopique ou bien faire de telle sorte que les points d'intersection des deux axes de Cardan avec l'axe gyroscopique se confondent en un seul point.

Notons ici, que le pendule gyroscopique avec couple de gravité et rotor balourdé (disposition des poids du disque suivant fig. 76) présente aussi de multiples phénomènes très intéressants. Toutefois, ceci nous amènerait trop loin, si on voulait ici approfondir cette question. Que le lecteur s'amuse à les découvrir lui-même. Pour ces expériences, il faudra modifier les grandeurs du couple de gravité et des moments d'inertie en fixant différents poids additionnels. De plus, il faudra lancer le gyroscope que modérément, donc une légère poussée du doigt suffira.

### c) Les cas limites du pendule gyroscopique

Les expériences exécutées jusqu'à présent ont montré que le mouvement de précession est une trajectoire circulaire pour un assujettissement de force égale du système autour des deux axes de Cardan, mais conduit pour un assujettissement de forces différentes à des trajectoires en ellipse. L'ellipse est d'autant plus mince que les assujettissements autour des deux axes de Cardan sont différents. Dans le cas limite où l'assujettissement autour d'un axe devient absolument nul, l'ellipse se transforme en une droite. Ceci peut être montré de deux manières différentes par des expériences. Nous replaçons à cet effet l'axe extérieur de Cardan en position verticale et enlevons le poids additionnel sur le cadre intérieur. Puis on accroche par ex. entre le cadre intérieur et le cadre extérieur des ressorts d'assujettissement. L'axe gyroscopique n'obtient certes pas de position d'équilibre bien définie mais par contre un plan d'équilibre, étant donné que les ressorts cherchent constamment à tirer l'axe vers le plan horizontal. Lorsque l'axe gyroscopique est incliné vers le plan horizontal, le couple engendré provoque une précession autour de l'axe de Cardan

vertical. Cette expérience correspond exactement à la première expérience de précession que nous avons exécutée, sauf que les ressorts ont pris le rôle des poids déposés sur le cadre intérieur et qu'ils produisent le couple autour de l'axe de Cardan intérieur. Si la suspension de l'axe de Cardan extérieur était exempt de frottements, le gyroscope continuerait sans interruption à produire un mouvement de précession. En réalité, il se forme lors de la précession des couples de frottement sur l'axe extérieur de Cardan qui eux à leur tour engendrent des précessions autour de l'axe de Cardan intérieur. Il en résulte une diminution de l'inclinaison du cadre intérieur. Ceci engendre en même temps une diminution du couple et, par conséquent, de la vitesse de précession autour de l'axe extérieur de Cardan. Le mouvement, par suite des forces de frottements, se ralentira de plus en plus pour s'arrêter finalement complètement lorsque le cadre intérieur est devenu horizontal. L'expérience peut aussi être exécutée d'une autre façon en enlevant non pas l'assujettissement du cadre extérieur mais celui du cadre intérieur. Les ressorts seront donc suspendus uniquement entre le cadre extérieur et les tiges-supports. L'axe gyroscopique sera toujours tiré par cet assujettissement vers un plan vertical. Si l'axe dévie de ce plan, les ressorts accrochés produisent un couple qui fait effectuer au gyroscope une précession autour de l'axe de Cardan intérieur. Mais la précession ne peut avoir lieu que jusqu'au moment où le cadre intérieur bascule dans le plan du cadre extérieur. Comme dans cette position, l'axe gyroscopique est parallèle à l'axe du couple extérieur, le cadre extérieur peut céder au couple et rentrer en oscillant dans la position d'équilibre. Après quelques oscillations, le système se mettra de nouveau au repos.

Avec les expériences décrites à l'instant, l'assujettissement autour d'un des axes a été annulé. Dans l'autre cas limite, on laisse devenir l'assujettissement de plus en plus fort et finalement on rend le système solidaire d'un de ses axes de Cardan. Ainsi le gyroscope perd un degré de liberté et par conséquence l'axe gyroscopique ne peut se mouvoir que dans un seul plan. Comment le gyroscope réagit à cette limitation de sa liberté de mouvement, l'expérience suivante va nous le montrer. A cet effet, nous assujettissons le cadre extérieur au socle de l'appareil en bloquant la vis moletée (fig. 20). Le cadre intérieur sera assujetti élastiquement par accrochage de ressorts. Avec un gyroscope immobile le système exécute, après déclenchement par choc, des oscillations autour de l'axe de Cardan intérieur. Le gyroscope sera maintenant (pas trop fortement) lancé et le cadre intérieur reheurte. Le système oscille de la même manière que dans le cas précédent où le gyroscope était arrêté. A l'aide d'un chronomètre on peut facilement constater que le temps des oscillations n'a pratiquement pas bougé. La rotation du gyroscope a donc manifestement pas d'influence sur la tenue du système à deux degrés de liberté. Toutefois, il faut être prudent avec tous les gyroscopes à liberté restreinte de mouvement. Les modifications de direction de l'axe gyroscopique sont en effet seulement possible s'il existe des couples de précession correspondants qui peuvent provoquer ces modifications de direction. Si donc le cadre intérieur oscille chez un gyroscope en marche, les couples de précession nécessaires à la production de ces oscillations doivent

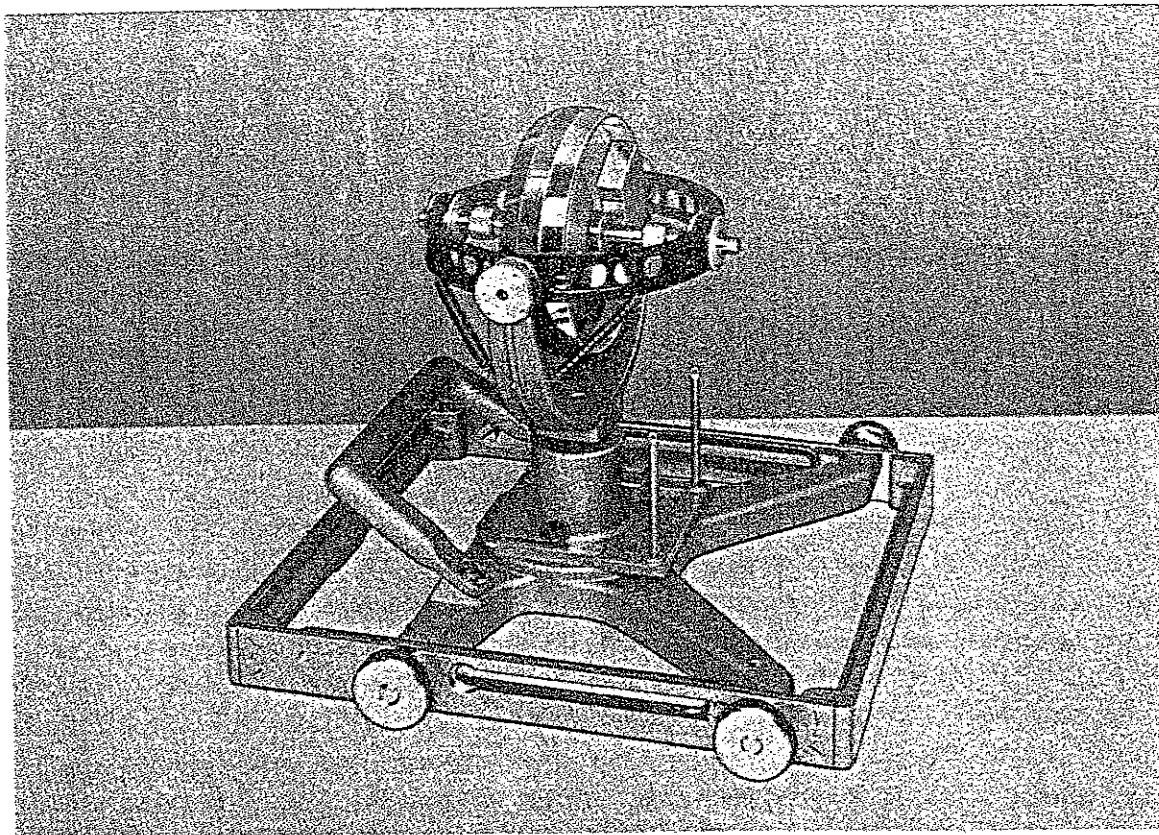


Fig. 20. Pendule gyroscopique avec assujettissement par ressort sur un seul axe uniquement.

être absorbés par l'assujettissement rigide du cadre extérieur et par les suspensions de l'axe de Cardan intérieur. Ces pressions de précession peuvent atteindre des valeurs très importantes et conduisent, pour cette raison, facilement à des détériorations.

Par le fait que de fortes pressions de précession se produisent avec des gyroscopes à assujettissement rigide partiel, on peut facilement comprendre que la moindre tendance à la déformation que ce soit dans l'axe gyroscopique ou dans le cadre à Cardan, ou la moindre molesse du support de l'appareil, par ex., le montage sur des pieds en caoutchouc, peut déjà avoir une influence considérable sur le déroulement de l'expérience. En présence de problèmes gyroscopiques techniques, on ne doit pas perdre de vue cette flexibilité des axes gyroscopiques même très solides.

## 2.6 L'influence de l'inertie du cadre

La plupart des gyroscopes utilisés en technique sont à suspension à la Cardan. Ce type de suspension peut avoir deux sortes d'effet sur la tenue d'un gyroscope, un effet cinématique et un effet cinétique. L'influence cinématique est provoquée par



les limitations de mouvement, auxquelles sont soumis le rotor, le cadre intérieur et le cadre extérieur par suite de la géométrie du système à Cardan. Ceci est équivalent pour les systèmes à Cardan intérieur comme extérieur. Nous reviendrons d'une façon plus précise sur ce type d'influence des cardans dans le chapitre 5.1, où il est d'une importance particulière pour l'étude des gyromètres traités en cet endroit. Nous nous limiterons dans ce chapitre à une description des effets cinétique qui ont pour origine les inerties de masse pas toujours négligeables des cadres à Cardan. Ces influences sont surtout importantes dans les systèmes à Cardan extérieur, car le rapport de l'inertie du cadre à l'inertie du rotor  $y$  est beaucoup plus grand que dans les systèmes à Cardan intérieur.

On constate que l'inertie du cadre peut influencer non seulement quantitativement le comportement des gyroscopes à suspension à la Cardan mais peut aussi provoquer des modifications qualitatives. Ils se manifestent par des effets d'un type nouveau. Nous allons traiter ici deux phénomènes de ce genre: la dérive cinétique d'un gyroscope à Cardan sous l'influence d'oscillation, laquelle est très importante dans beaucoup d'applications pratiques ainsi que la tenue en stabilité des gyroscopes lourds à Cardan.

#### a) La dérive cinétique du gyroscope à Cardan exempt de forces (gyro libre)

L'essai de précession a montré que la vitesse de précession  $\omega_p$  est proportionnelle à la grandeur du couple actif. Par absence de couple, la vitesse de précession sera nulle. Dans ce cas l'axe cinétique restera fixe par rapport à l'espace, tandis que l'axe de la figure visible peut danser autour de l'axe cinétique comme ceci a été expliqué lors de l'étude des mouvements de nutation. Ce type de mouvement n'est toutefois, strictement valable que pour un corps unique, tournant et rigide. Par contre le gyroscope à Cardan est composé de trois corps rigides. Si on pouvait négliger l'inertie des cadres à Cardan, le comportement du rotor ne serait pas modifié, comme dans le cas d'un corps unique. En réalité, il se produit sous certaines conditions, à cause de l'inertie du cadre, une dérive de l'axe cinétique d'habitude fixe par rapport à l'espace, l'écartant de sa direction d'origine. Comme cet effet n'a lieu qu'en présence d'oscillations du système à Cardan, on le désigne par **dérive cinétique**.

Montrons cet effet par une expérience. Pour ce faire, on utilise le gyroscope-modèle sans poids additionnel et avec l'axe du cadre extérieur en position verticale. En équilibrant bien le centre de gravité, l'axe du rotor reste en position fixe par rapport à l'espace pour toute direction dans la mesure où on libère le gyroscope après son lancement sans provoquer de choc. On renouvelle cette expérience, mais on provoque par des chocs appropriés (il est bon de ne pas lancer le rotor trop fortement) des oscillations de nutation. Lorsque le système à Cardan se trouve en position normale dans laquelle les deux cadres sont - en négligeant les balancements provo-

qués par les oscillations de nutations - en position moyenne perpendiculaires l'un par rapport à l'autre, l'axe de la figure décrit un cône pointu légèrement elliptique dont l'axe reste fixe par rapport à l'espace. Cet axe est l'axe cinétique. Si on renouvelle maintenant cette expérience avec le cadre intérieur incliné, on constate que l'axe du cône de nutation ne conserve pas sa direction par rapport à l'espace. Au contraire, il dérive pour une position inclinée constante du cadre intérieur, de telle sorte qu'une rotation lente du système autour de l'axe extérieur du cadre se superpose au mouvement de nutation.

Si on modifie dans cette expérience l'inertie du cadre (par apposition de poids additionnels), la vitesse de rotation du gyroscope, l'amplitude de nutation et la position d'inclinaison, il en résulte que la dérive s'effectue plus rapidement pour:

1. des cadres à Cardan lourds
2. une vitesse de rotation plus élevée
3. une amplitude plus grande des oscillations de nutation et
4. une inclinaison moyenne croissante  $\beta_0$  du cadre intérieur (mesurée par rapport à la position normale horizontale).

Une théorie plus précise, que l'on peut trouver sous les N°9 et 10 des travaux indiqués dans la nomenclature bibliographique, permet de connaître aussi l'influence quantitative de ces grandeurs.

Il faut aussi mentionner que des phénomènes de dérive correspondants, peuvent non seulement être produits par la présence de nutation mais aussi par des oscillations d'autres sortes. Le gyroscope peut par exemple être précessionné par des couples perturbateurs périodiques dus aux balourds du rotor ou des secousses de son support. Enfin des dérives peuvent même se produire avec un axe de la figure du rotor non oscillant, lorsque le support de base - et par conséquent aussi les cadres à Cardan - exécutant des oscillations rotatives.

Les phénomènes de dérive peuvent être expliqués en les assimilant à un **effet redresseur** car l'inertie du cadre combinée aux conditions particulières du mouvement du système à Cardan effectue un redressement partiel des oscillations se propageant de part de d'autre.

La compréhension en est facilitée en sachant que l'effet d'inertie des cadres dépend de la position inclinée du cadre intérieur. Observons pour cela les deux croquis de la fig. 21. Ils montrent le dispositif à Cardan dans deux positions différentes. Lorsque l'axe du rotor parcourt un cône circulaire, de sorte qu'un point de cet axe décrit le cercle dessiné en pointillé, le cadre intérieur exécute nécessairement une rotation d'un déplacement angulaire  $\beta$  et le cadre extérieur un déplacement angulaire  $\alpha$ . Dans le cas de mouvements à faible amplitude et d'un cadre intérieur horizontal en position moyenne (figure de gauche) les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont iden-

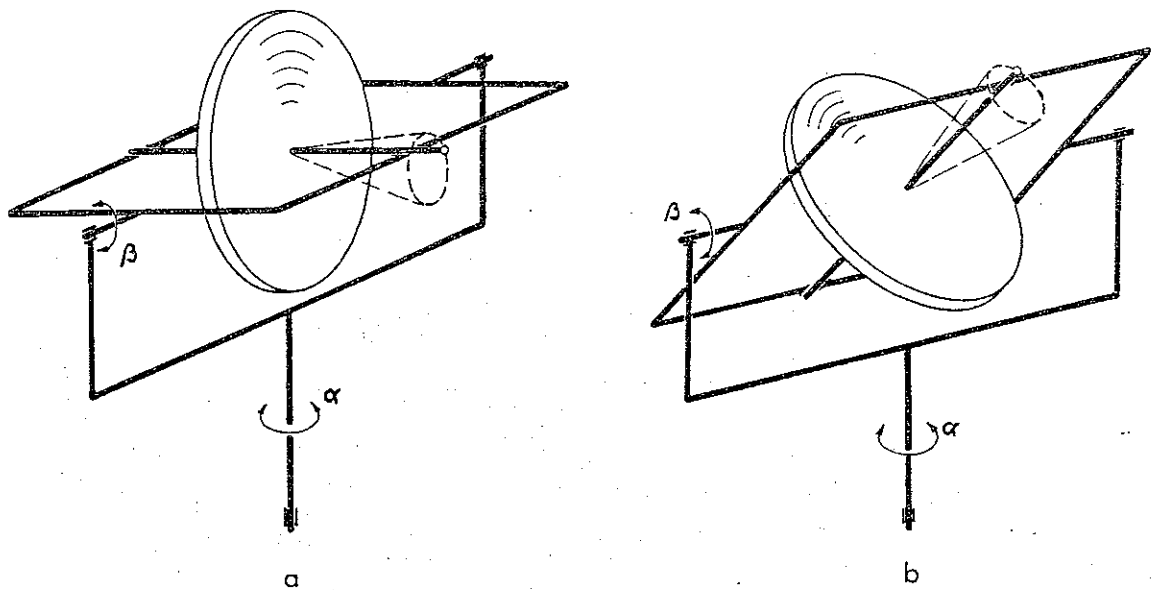


Fig. 21. Pour l'explication de la dérive cinétique d'un gyroscope à Cardan.

tiques. Toutefois, si en position inclinée du cadre, on devait décrire un cône circulaire de même dimension, nécessairement le cadre extérieur devra tourner plus vite que le cadre intérieur et  $\alpha$  devient donc plus grand que  $\beta$ . On peut facilement comprendre ces propriétés purement géométriques, en faisant pivoter l'axe du rotor du modèle, suivant un cône, avec différentes positions inclinées du cadre intérieur. Comme le cadre extérieur doit parcourir un plus grand chemin si le cadre intérieur est incliné, son inertie se répercute plus fortement. La contribution, que fournit le cadre extérieur à l'inertie du système global, croit donc avec l'inclinaison du cadre intérieur. Exprimé d'une autre façon: Le moment d'inertie effectif  $J_{\text{eff}}$  augmente avec la croissance de l'inclinaison (fig. 22). On désigne, dans ce cas, par moment d'inertie effectif, la moyenne géométrique des deux moments d'inertie  $J_x$  et  $J_y$ .

$$J_{\text{eff}} = \sqrt{J_x J_y}. \quad (5)$$

Cette expression a déjà été utilisée dans le chapitre 2.2, pour la formule (4) relative à la fréquence de nutation. Comme nous savons que  $J_{\text{eff}}$  augmente avec l'inclinaison croissante  $\beta_0$  suivant la courbe de la fig. 22, nous nous apercevons en même temps que la fréquence de nutation  $\omega_n$  devient plus petite avec un  $\beta_0$  croissant. Cette constatation peut, elle aussi, être facilement démontrée par des expériences sur le modèle.

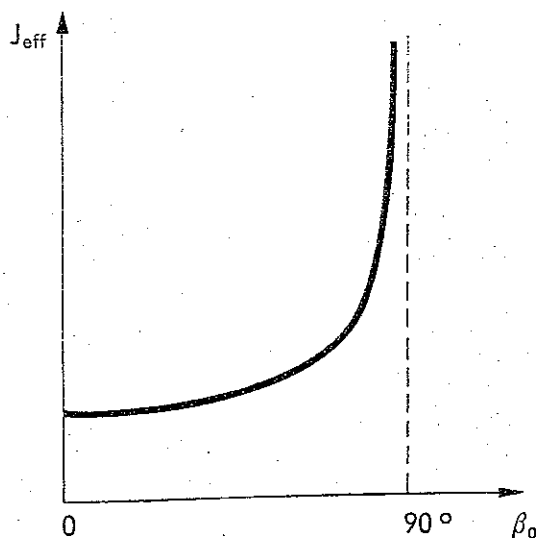


Fig. 22. Le moment d'inertie effectif d'un gyroscope à Cardan pour différentes inclinaisons  $\beta_0$  du cadre intérieur.

La dépendance de la fréquence de nutation de  $\beta_0$  a pour conséquence que la tranquillité de marche d'un gyroscope ne dépend non seulement (comme montré au chapitre 2.4) des moments d'inertie du système global, mais aussi de l'inclinaison du cadre intérieur. Si les moments d'inertie du système global sont choisis de telle sorte que la fréquence de nutation  $\omega_n$  avec un cadre intérieur horizontal est plus grande que la fréquence de rotation  $\omega$  du rotor, il en résulte nécessairement (comme  $\omega_n$  devient plus petit avec  $\beta_0$  croissant) que pour une inclinaison déterminée  $\beta_0$  on obtienne  $\omega_n = \omega$ . Mais ceci correspond une nouvelle fois au cas de résonance déjà traité précédemment. Des balourds résiduels du rotor peuvent en outre produire des vibrations forcées de grandeurs appréciables. Pour mieux montrer cet effet dans l'expérience, on peut, si besoin est, augmenter le déséquilibre (le balourd) du rotor en y collant un peu de plastiline. Le modèle doit être utilisé sans poids additionnel dans cette expérience.

On a dit précédemment qu'il ne se produit pas de dérive cinétique avec un cadre intérieur en position moyenne horizontale. Evidemment ceci n'est valable que pour un gyroscope à Cardan avec cadre intérieur symétrique. Tel est le cas avec notre modèle. Exprimé en d'autres termes plus précis: ceci est toujours vrai, lorsque l'axe de la figure est en même temps axe d'inertie principal du cadre intérieur. Si tel n'est pas le cas, il peut se produire des dérives cinétiques même en position normale pour  $\beta_0 = 0$ . Par conséquent, dans les constructions d'appareils gyroscopiques particulièrement précis, il faut concevoir le cadre intérieur d'une façon appropriée et l'équilibrer le cas échéant aussi dynamiquement, permettant ainsi à l'axe de la figure de devenir axe d'inertie principal du cadre intérieur.

#### b) Le gyroscope à Cadran lourd

Dans le chapitre 2.5 nous avons désigné par pendule gyroscopique, un gyroscope dont le centre de gravité se trouve sur l'axe de la figure mais ne coïncidant pas

avec le point de soutien. Ceci s'obtient facilement sur le modèle en apposant sur un seul côté un poids et en mettant l'axe du cadre intérieur en position horizontale (fig. 18). Dans les essais décrits pour ce cas de figure, l'inertie du cadre n'est pas sans effet sur le gyroscope sans toutefois être très importante. Uniquement par fort basculement en dehors de la position normale du cadre intérieur, cet effet peut devenir important et peut produire finalement dans le cas extrême où  $\beta_0 \approx 90^\circ$ , c.à.d. lorsque les plans des deux cadres sont près de se superposer, des phénomènes tout nouveaux. Nous voulons analyser ceci de plus près et pour cette raison étudier le pendule gyroscopique avec cadre extérieur à axe vertical.

Nous utilisons le modèle en position normale et nous fixons un des poids additionnels sur le cadre intérieur. Le rotor étant immobile, les plans des deux cadres coïncident dans la position d'équilibre. Si le poids se trouve en bas, le pendule est statiquement stable, s'il se trouve en haut, la position d'équilibre devient instable. On doit s'attendre conformément aux résultats du chapitre 2.5 que la position d'équilibre haute et instable peut être rendue stable stable par un moment cinétique assez important du gyroscope. Ceci est effectivement le cas, toutefois, il est nécessaire qu'une condition complémentaire soit remplie, laquelle n'est pas importante pour le pendule gyroscope normal: La présence de mouvement du système à Cardan n'est pas arbitraire, au contraire la vitesse de rotation  $\dot{\alpha}$  du cadre extérieur autour de l'axe du cadre extérieur doit se trouver entre deux limites exactement calculables  $\dot{\alpha}_1$  et  $\dot{\alpha}_2$ :

$$\dot{\alpha}_1 < \dot{\alpha} < \dot{\alpha}_2. \quad (6)$$

Les calculs détaillés que l'on peut trouver dans l'article cité sous le N°11 du répertoire bibliographique, montrent que les deux valeurs limites  $\dot{\alpha}_1$  et  $\dot{\alpha}_2$  sont positives avec un poids placé en partie supérieure. Ceci signifie que le système même avec un moment cinétique très grand ne peut être stabilisé que lorsqu'on donne au système à Cardan un moment cinétique propre autour de l'axe de Cardan extérieur tel que cette condition (6) soit remplie. Dans ce but le cadre extérieur doit être lancé dans le sens de rotation du gyroscope. On peut facilement constater que le gyroscope ne conserve pas sa position verticale après sa libération quand le cadre extérieur ne tourne pas ( $\dot{\alpha} = 0$ ), mais qu'il exécute le plus souvent un mouvement mitigé de nutation et de précession autour de la position d'équilibre. Par contre, après une percussion appropriée de lancement du cadre extérieur, l'axe gyroscopique reste, dans le sens de la rotation du gyroscope, absolument immobile dans sa position verticale. Lorsque le rotor n'est pas lancé trop fortement, on peut facilement montrer que le système devient de nouveau instable lorsque le cadre extérieur a été percuté trop brutalement. La percussion dans le sens contraire à la rotation du gyroscope engendre un comportement, également, instable.

Ce qui est nouveau et étonnant c'est que la position d'équilibre inférieure, statiquement stable du pendule gyroscope n'est plus, pour tous les cas, dynamiquement stable. Avec le poids fixé en position basse, la vitesse limite inférieure  $\dot{\alpha}_1$  devient négative, tandis que la vitesse limite supérieure  $\dot{\alpha}_2$  continue à rester positive. On peut conclure que le système reste stable dans tous les cas, avec un cadre extérieur en position immobile. Toutefois, une instabilité peut se produire en percutant le cadre extérieur suffisamment fortement dans le sens de la rotation du gyroscope (le mieux avec un rotor tournant lentement) ou en faisant tourner le cadre extérieur dans le sens contraire à la rotation du gyroscope.

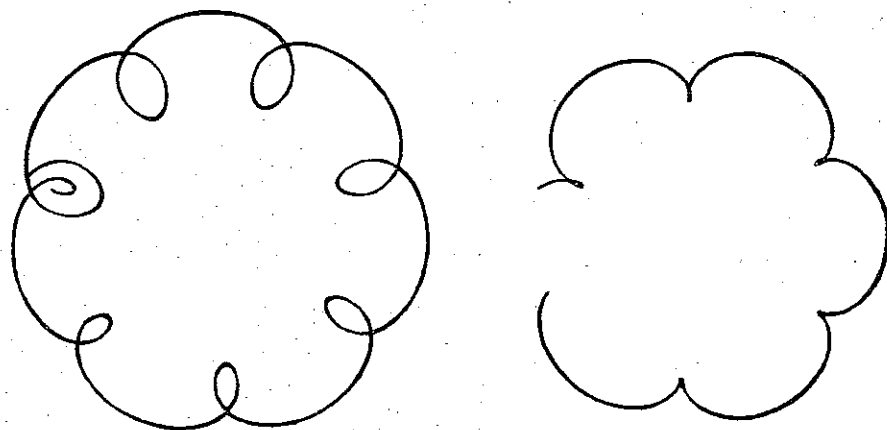


Fig. 23. Courbe de la trajectoire du sommet d'un gyroscope à Cardan, poids en haut.

Si l'on écarte un peu l'axe du gyroscope de sa position verticale, il se produit des mouvements qui suivant les conditions d'origine ont des caractéristiques différentes. La fig. 23 montre deux enregistrements de pendules gyroscopiques avec le poids placé en partie supérieure. Les deux relevés de la fig. 24 proviennent d'un pendule avec le poids placé dans le bas. On peut obtenir des relevés de ce type - ainsi que des variations multiples - si on fixe sur un palier d'appui du rotor du cadre intérieur une ampoule à source lumineuse ponctuelle et en photographiant les mouvements de ce point lumineux par le dessus.

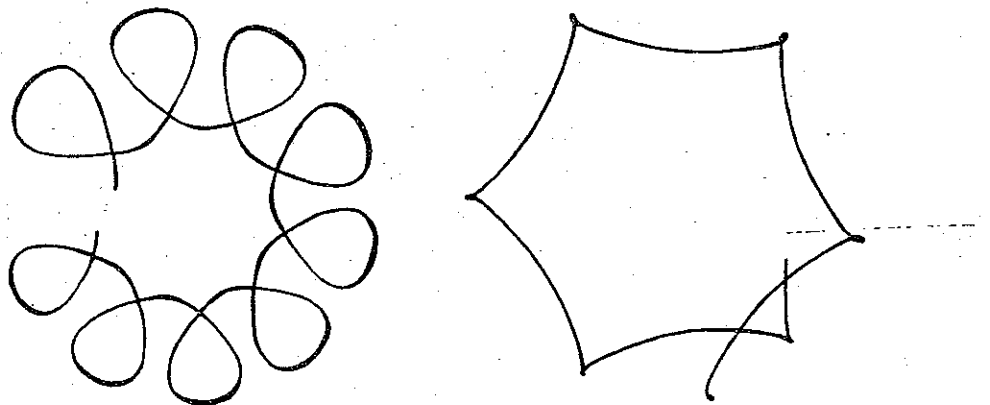


Fig. 24. Courbe de la trajectoire du sommet d'un gyroscope à Cardan, poids en bas.

### 3. LE GYROSCOPE ASYMETRIQUE

Si un gyroscope possède un ellipsoïde d'inertie avec trois axes principaux différents entre-eux, on dit qu'il est asymétrique. Le gyroscope asymétrique possède donc trois grands moments d'inertie principaux différents. Malgré que le gyroscope asymétrique ne joue pas un rôle particulier dans les applications techniques du gyroscope, nous allons le traiter ci-après non seulement pour son comportement particulièrement intéressant et attirant mais avant tout parce qu'il se prête bien pour approfondir nos connaissances générales des phénomènes gyroscopiques.

Pour l'exécution des expériences avec le gyroscope asymétrique nous disposons les poids-disques comme indiqué sur la figure 75: On fixe deux poids-disques sur le même secteur, mais un de part et d'autre des faces du disque. Nous rappelons expressément que pour toutes les expériences avec le gyroscope asymétrique un lancement à la main est suffisant, un entraînement trop rapide du gyroscope asymétrique, particulièrement à l'aide de la manivelle d'entraînement peut devenir dangereux et détruire l'appareil. En outre, les phénomènes gyroscopiques sont plus facilement observables avec un gyroscope tournant lentement.

#### 3.1 Les précessions

Le gyroscope asymétrique peut lui aussi exécuter des mouvements de précession, qui ne se distinguent ni qualitativement, ni quantitativement des précessions du gyroscope symétrique traitée précédemment. Une expérience va nous en convaincre. Nous utilisons le gyroscope sans poids additionnels, nous le lançons à la main et exerçons ensuite un couple sur le cadre intérieur. Celui-ci peut être produit soit en exerçant une pression avec le doigt, ou mieux en accrochant un ressort dans un oeillet sur le cadre intérieur - ce qui est plus convaincant dans une présentation devant un cercle d'auditeurs - le cadre intérieur sera tourné utilement vers le haut pour l'expérience, l'oeillet se trouvant ainsi en haut. L'allongement visible du ressort dont l'extrémité libre sera maintenu dans la main est une mesure de grandeur du couple agissant. Pour des raisons qui seront expliquées dans le paragraphe suivant, il est inutile de produire le couple en fixant un poids sur le cadre intérieur comme il a été procédé pour la précession du gyroscope symétrique. On obtiendra, autrement, des perturbations dues à des nutations. Si l'on veut, tout de même, exécuter l'expérience comme antérieurement, on doit, d'abord, fixer la paire de poids additionnels N°2 (grands poids) à l'endroit prévu à cet effet du cadre intérieur.

### 3.2 Les nutations

On utilise le gyroscope sans poids additionnels et on le lance légèrement. Si on produit des nutations par des percussions, l'extrémité de l'axe gyroscopique se déplace alternativement sur un petit et un grand cercle. Ceci est la première différence frappante par rapport aux nutations d'un gyroscope symétrique dans lequel l'axe restait constamment sur la surface d'une enveloppe d'un cône circulaire dont l'angle au sommet était plus ou moins grand suivant l'importance de la percussion produite. Dans le cas d'un gyroscope asymétrique le mouvement se déroule toujours entre deux cercles limites concentriques dont l'écartement réciproque croît avec la grandeur de l'asymétrie. La courbe de la trajectoire touche alternativement le cercle limite intérieur et le cercle limite extérieur (fig 25).

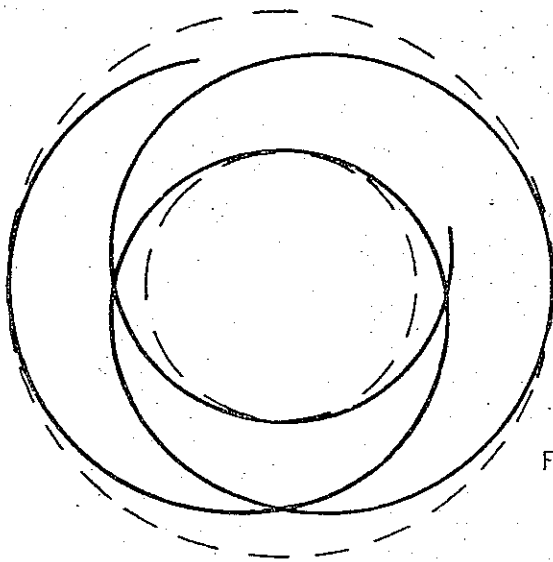


Fig. 25. Courbe de trajectoire de la pointe du gyroscope lors de la nutation d'un gyroscope asymétrique.

Tandis que dans le cas du gyroscope symétrique, le cône de révolution roulant et le cône de révolution de base et en conséquence aussi le cône de nutation décrit par l'axe de la figure étaient des cônes circulaires, le cône de révolution roulant fixe par rapport au corps devient dans le cas du gyroscope asymétrique un cône elliptique, tandis que le cône de révolution de base fixe par rapport à l'espace devient un cône dont l'enveloppe s'interpénètre plusieurs fois et qui en général ne se referme pas nécessairement sur lui-même. La courbe de la section de ce cône avec un plan orthogonal à l'axe du cône donnerait une figure semblable à celle dessinée sur la fig. 25.

Une autre différence dans les nutations du gyroscope asymétrique par rapport à celles d'un gyroscope symétrique réside dans le fait que les nutations peuvent main-



tenant devenir instables suivant le rapport des moments d'inertie principaux, donc de la forme de l'ellipsoïde d'inertie. Le théorème général dit, que les nutations ne sont stables que lorsque la rotation s'effectue autour de l'axe du plus petit ou du plus grand moment d'inertie principal. Par contre, les nutations lors de rotation autour de l'axe du moment d'inertie moyen sont instables.

L'expérience montre l'exactitude de cette règle. Nous utilisons d'abord le gyroscope dans sa forme primitive sans poids additionnels sur le cadre intérieur. Dans ce cas, le moment d'inertie autour de l'axe gyroscopique est le plus grand des trois moments d'inertie principaux. Les nutations doivent être stables dans ce cas. Ce que l'expérience confirme.

En fixant des poids additionnels sur le cadre intérieur, nous pouvons maintenant agrandir d'une manière connue les moments d'inertie autour des axes transversaux du gyroscope. Nous le faisons d'abord en vissant sur le cadre intérieur, la paire de poids additionnels N°1 (petits poids). Ces poids sont calibrés de telle façon que l'un des moments d'inertie autour des axes transversaux du gyroscope soit plus grand, tandis que l'autre soit plus petit que le moment d'inertie autour de l'axe du gyroscope. L'axe du rotor devient donc ainsi axe du moment d'inertie principal moyen. Les nutations deviennent maintenant instables. Dans cette expérience le gyroscope ne sera lancé que modérément fort et libéré avec précaution. Une percussion n'est pas nécessaire étant donné qu'il existe toujours des forces érectrices (p. ex. balourds) qui provoquent des nutations. Par suite de l'instabilité, les mouvements deviennent tellement violents qu'ils font culbuter complètement le gyroscope. Cette culbute, ne dépendant uniquement que des rapports des moments d'inertie, est indépendante de la grandeur absolue de la vitesse de rotation du gyroscope. Même sur des gyroscopes tournant très lentement, cette instabilité est encore facilement observable.

Cette expérience, qui fait non seulement partie des plus belles expériences à exécuter avec le modèle de gyroscope présent, mais est certainement une parmi les plus belles de l'ensemble de l'enseignement sur le gyroscope, a nécessité des soins particuliers lors de la conception du modèle gyroscope. Le théorème énoncé sur l'instabilité des nutations se rapportent en effet strictement à un corps unique et non à un ensemble de trois corps comme nous le rencontrons en réalité sur le modèle du gyroscope. Les axes principaux nécessaires à la stabilité sont l'axe de rotation du gyroscope ainsi que les deux axes transversaux A et B de la fig. 75 de l'annexe, mais non les deux axes de Cardan. Les cadres des cardans doivent toutefois accompagner les mouvements du système. Ils apportent donc une contribution aux moments d'inertie autour des axes transversaux du gyroscope et celle-ci est de grandeur différente suivant la position du disque gyroscopique. Si un axe transversal du gyroscope coïncide avec l'axe de Cardan intérieur, cette contribution est faible étant donné qu'elle n'est formée que par le moment d'inertie du cadre intérieur. Par contre, après

une rotation de  $90^\circ$ , c.à.d. lorsque l'axe transversal du gyroscope tombe dans l'axe vertical, les moments d'inertie des deux cadres à Cardan s'ajoutent. Ceci a pour conséquence que les moments d'inertie autour des axes A et B oscillent entre certaines valeurs moyennes pendant la rotation du disque. L'amplitude de la variation dépend de la grandeur des moments d'inertie de deux cadres à Cardan. D'où l'intérêt à rendre les cadres aussi légers que possible pour maintenir les variations perturbatrices dans les limites étroites. D'autre part, l'asymétrie du gyroscope proprement dit, c.à.d. le disque avec les quatre poids-disques doit être d'une valeur telle qu'elle puisse dépasser la zone de variation des moments d'inertie autour des axes transversaux du gyroscope. En effet, l'exigence de faire du moment d'inertie autour de l'axe de rotation du gyroscope le moment moyen des trois moments d'inertie principaux et ceci indépendamment de la position respective du disque ne peut être remplie qu'à cette condition.

Pour compléter les connaissances, on procèdera encore à l'expérience de nutation pour le cas où le moment d'inertie autour de l'axe de rotation du gyroscope (axe de la figure) devient le plus petit des trois moments d'inertie principaux. Ceci s'obtient aisément en agrandissant d'une manière suffisante les moments d'inertie des cadres à Cardan, donc par fixation des poids additionnels N°2 sur le cadre intérieur. L'expérience, dans ce cas, redonne des nutations stables.

Le fait, que les mouvements de rotation du gyroscope asymétrique soient stables autour de deux des axes d'inertie principaux, mais instables autour du troisième peut aussi être montré par une autre expérience. Nous utiliserons pour ce faire le gyroscope d'abord sans poids additionnels. Comme les expériences précédentes l'ont montré, la rotation autour de l'axe propre au gyroscope est dans ce cas stable. Les deux axes d'inertie principaux, perpendiculaires à l'axe du gyroscope, sont donnés par les directions A et B de la fig. 75. Nous pouvons montrer que les rotations autour de l'axe B (axe du plus petit moment d'inertie principal) sont stables, et que par contre, les rotations autour de l'axe A (axe du moment d'inertie principal moyen) sont instables. Dans ce but, le disque gyroscopique est tourné jusqu'à ce que l'axe, autour duquel la rotation doit s'effectuer, se superpose avec l'axe de Cardan extérieur en position verticale. Si le disque gyroscopique possède la bonne position, le système est mis en rotation en lançant vigoureusement le cadre extérieur autour de l'axe extérieur de Cardan. Dans le cas d'un mouvement stable, le disque gyroscopique ainsi que le cadre intérieur gardent leur position d'origine relative à cadre extérieur. Par contre, dans le cas d'un mouvement instable, ils culbutent. Cette culbute peut être rendue très visible en collant des bandes de repérage ou en plaçant un cavalier élastique en tôle peint d'une certaine couleur sur le bord du rotor.

Il ne faut pas délivrer un trop petit moment cinétique au cadre extérieur, pour ces expériences, car celles-ci risquent d'être perturbées par des phénomènes de frottement. Après fixation par vis de la petite paire de poids addition-

nels sur le cadre intérieur, la rotation autour de l'axe du gyroscope est instable comme les expériences précédentes l'ont déjà montrée. Par conséquent les rotations autour des deux axes A et B doivent maintenant rester stables. Ceci aussi se laisse aisément démontrer par l'expérience. Dans ce cas A est l'axe du plus grand moment d'inertie principal et B celui du plus petit.

Avec la paire de poids additionnels N°2, les rotations autour de l'axe du gyroscope redeviennent stables. Par contre, les mouvements autour de l'axe transversal B du gyroscope deviennent alors instables, puisque cet axe est devenu celui du moment d'inertie principal moyen. Les rotations autour de l'axe A (axe du plus grand moment d'inertie principal) redeviennent stables.

Un mot encore au sujet de la signification pratique de l'expérience: Le gyroscope asymétrique se trouve réalisé dans l'hélice d'avion bipale. Si l'on choisissait les moments d'inertie de l'hélice même, ainsi que les parties motrices reliées à l'hélice, de telle façon que le moment d'inertie autour de l'axe du vilebrequin devienne le moment moyen des trois moments d'inertie principaux, il en résulterait un tremblement continu de l'ensemble du système puisque les nutations deviennent instables. En suspendant le moteur on fixe une limite à ce tangage des nutations. En pratique, le moteur, relié à l'hélice d'avion, dont les moments d'inertie s'ajoutent aux moments d'inertie autour des axes transversaux des hélices, est en général tellement lourd, que le moment d'inertie autour de l'axe du vilebrequin représente toujours le plus petit des trois moments d'inertie principaux.

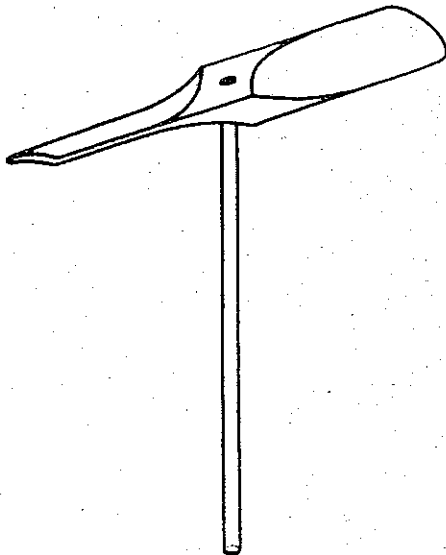


Fig. 26. Hélice d'avion-jouet servant à la démonstration de la stabilité des rotations autour des axes principaux.

A l'aide d'un modèle facilement réalisable, l'instabilité d'une hélice d'avion bipale peut être démontrée nettement. Une hélice fabriquée en tôle ou en bois est munie d'une tige (fig. 26) permettant de la faire tourner entre les mains (fig. 27). Si le choix de la longueur de la tige est judicieux, l'hélice d'avion se soulève dans

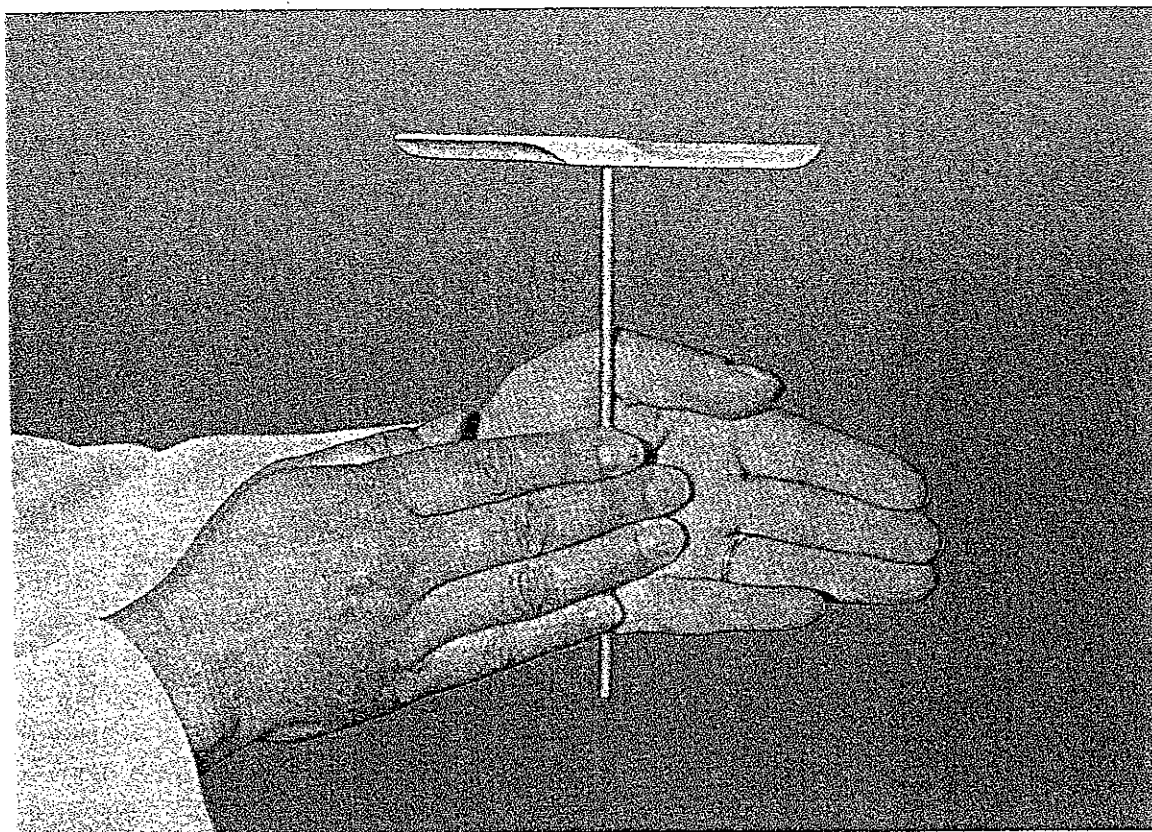


Fig. 27. Mise en rotation de l'hélice entre les mains.

l'air après mise en rotation et tourne d'une façon stable autour de l'axe de la tige. Ce cas peut se présenter avec une tige très courte (axe de la tige = axe du plus grand moment d'inertie principal) et également avec une tige suffisamment longue (axe de la tige = axe du plus petit moment d'inertie principal). Pour certaines longueurs de tige intermédiaires (axe de la tige = axe du moment d'inertie principal moyen) il n'est pas possible d'obtenir un vol stable. En essayant avec différentes longueurs de tige, on trouve facilement les trois cas possibles.

Dans cette expérience, seule la présentation de la stabilité avec des tiges très courtes risque de poser quelques difficultés. Avec un modèle d'hélice d'environ 20 cm d'envergure, la tige ne doit pas dépasser une longueur de 1 à 2 cm, de sorte que l'hélice puisse tout juste encore être mise en rotation entre deux doigts. L'expérience réussit le mieux, lorsque l'hélice est assez plate et large, car à cette condition le moment d'inertie autour de l'axe de la tige est nettement différent de celui autour de l'axe transversal perpendiculaire à la direction longitudinale de l'hélice.

Une variante de cette expérience sera rapidement survolée: Une brique, une boîte à cigares ou un morceau de bois de forme correspondante est un gyroscope asymé-

trique avec trois axes d'inertie principaux A, B et C différents entre-eux (fig. 28). Il est facile et possible de lancer un tel type de corps en l'air en lui faisant exécuter des rotations rapides et stables autour des axes A (plus petit moment d'inertie principal) ou C (plus grand moment d'inertie principal). Par contre, on ne réussira pas, même en s'exerçant intensivement à obtenir des rotations rapides et stables autour de l'axe B (moment d'inertie principal moyen).

Por présenter cette expérience, les différentes surfaces latérales seront peintes en couleurs vives différentes. Dans le cas d'instabilité, la culbute du gyroscope est alors nettement reconnaissable à partir des changements de couleur de la face tournée vers l'observateur.

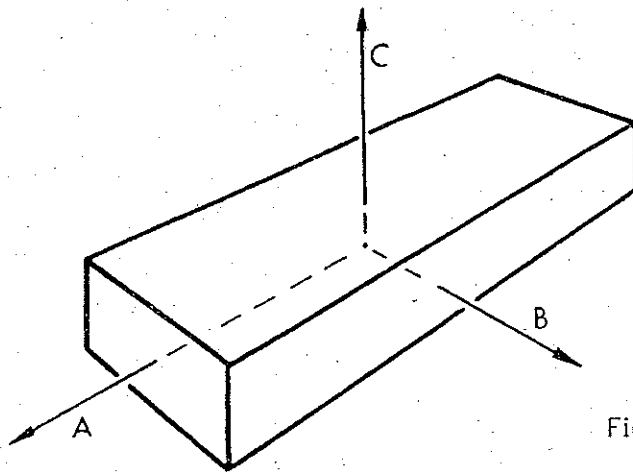


Fig. 28. Parallélépipède avec trois moments d'inertie principaux différents entre-eux.

### 3.3 Le gyroscope assujetti

Le gyroscope asymétrique et assujetti se différencie également dans son comportement par rapport à celui du gyroscope symétrique et assujetti. Ces différences apparaissent dans les différentes possibilités de mouvements instables. Ces nouvelles instabilités sont toutefois valables exclusivement en cas de nutations. Par contre, les principes énoncés pour le gyroscope symétrique concernant la stabilité des précessions dans les différents cas d'assujettissement statiquement stable, instable et mitigé, gardent leur validité. Nous allons très rapidement ci-après traité le problème de stabilité du gyroscope asymétrique à base de quelques expériences. Un approfondissement sur ces phénomènes extrêmement intéressants conduirait trop loin dans cet ouvrage. Toutefois, si un lecteur désirait approfondir plus amplement ce sujet, et

particulièrement, sa théorie, nous le renvoyons aux présentations très explicites du chap. 10 du livre de Grammel (voir le répertoire bibliographique à la fin de ce cahier).

**a) L'axe de la figure est l'axe du plus grand moment d'inertie principal**

Dans ce cas, on emploie l'appareil sans poids additionnel. L'assujettissement est réalisé, comme déjà pour le pendule gyroscopique symétrique, par ressorts accrochés entre les deux cadres à Cardan ainsi qu'entre le cadre extérieur et les tiges montantes du socle de base. Nous assujettissons le cadre intérieur avec la paire de ressort N°4 (les ressorts les plus faibles) tandis que nous employons la paire de ressorts N°3 pour l'assujettissement du cadre extérieur. Après accrochage des ressorts, le gyroscope sera lancé modérément fort et on observera les oscillations produites lors du ralentissement du mouvement. Le constat du résultat nous permet de dire que le pendule gyroscopique est stable et qu'il possède, seulement dans une plage déterminée assez basse des vitesses de rotation, une résonance légère c.à.d. un accroissement des amplitudes. Cette résonance peut être influencée en position et grandeur par modification des deux assujettissement par ressorts.

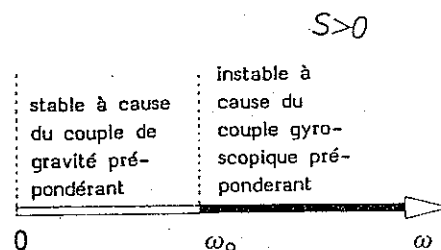
Un assujettissement du gyroscope par un couple de gravité ne peut pas être obtenu dans ce cas avec les poids additionnels existants car en apposant un des petits poids additionnels, l'axe du gyroscope n'est déjà plus l'axe du plus grand moment d'inertie principal pour toutes les positions du disque gyroscopique. Si l'on persiste à entreprendre des expériences avec un assujettissement par couple de gravité, il faut se fabriquer d'autres poids additionnels ou chercher une position plus basse du centre de gravité, en collant, par exemple, de la plastiline (cire).

**b) L'axe de la figure est axe du moment d'inertie principal moyen**

Dans ce cas, nous commençons les expériences avec un assujettissement du gyroscope à l'aide d'un couple de gravité. Nous plaçons à cet effet l'axe du cadre extérieur en position horizontale. Puis on visse un des deux grands poids additionnels en un point de suspension de l'axe du gyroscope sur le cadre intérieur. Ce poids correspond en grandeur exactement à celle nécessaire pour que le moment d'inertie autour de l'axe du gyroscope devienne pour toute position du disque gyroscopique le moment moyen des trois moments d'inertie principaux. Dans ce cas, les nutations du gyroscope libre étaient - comme les expériences l'ont montré dans le paragraphe précédent - instables pour toutes les vitesses de rotation. On peut s'attendre à se trouver en présence d'une instabilité même avec un gyroscope assujetti quand les forces gyroscopiques ont une influence prépondérantes, donc pour des vitesses de rotation élevées. Par contre, le gyroscope sera stable pour des faibles vitesses de rotation, par conséquent, les forces de l'assujettissement statiquement stable prédominent.

L'expérience suivante le confirme. Le gyroscope est lancé modérément fort, puis on place son axe en position verticale, de telle sorte que le poids se trouve dans le bas. Lorsque la vitesse d'entraînement est correctement choisie, le gyroscope commence des mouvements de nutations immédiatement après sa libération, lesquels lui font faire finalement une culbute complète. Il est instable. Si l'on laisse le gyroscope lentement finir ses mouvements, il se met, après un certain temps, de lui-même au repos et exécute des oscillations stables autour de la position d'équilibre inférieure, statiquement stable. La limite de la stabilité peut être constatée sans difficulté, en exécutant l'expérience avec un gyroscope entraîné avec des vitesses différentes et en le libérant à partir de la position d'équilibre. La fig. 29 donne un aperçu sur la stabilité du gyroscope dans le cas présent, c.à.d. pour un couple de gravité statiquement stable ( $S > 0$ ).

Fig. 29. Plages de stabilité du gyroscope lourd asymétrique avec assujettissement statiquement stable et rotation autour de l'axe du moment d'inertie principal moyen.



Nous exécutons maintenant la même expérience avec un assujettissement statiquement instable, donc avec le poids placé en haut. On peut s'attendre à ce que le gyroscope soit instable pour des grandes vitesses de rotation, donc pour une prépondérance des forces gyroscopiques. De même il va être instable pour des très faibles vitesses de rotation vu que le poids est en haut. Mais on est surpris par le fait qu'il existe entre les deux plages de vitesses de rotation, une, où le gyroscope est en mesure d'exécuter des mouvements stables. Nous relançons le gyroscope modérément fort et mettons l'axe du gyroscope en position verticale, mais de telle façon que le poids se trouve en haut, puis nous le libérons avec précaution. Pour une vitesse de rotation suffisamment grande, le gyroscope produit immédiatement des nutations et exécute une culbute complète. Pour des rotations plus lentes du gyroscope, les nutations ne conduisent plus à une culbute mais amènent l'axe du gyroscope de nouveau dans sa position statiquement instable avec des amplitudes plus ou moins grandes. Les mouvements sont ainsi devenus stables. Cette stabilité se maintient jusqu'à ce que l'influence du couple de gravité devienne trop grande et produise le renversement du gyroscope. La figure 30 donne un aperçu sur les conditions de stabilité dans le cas d'un assujettissement statiquement instable par un couple de gravité ( $S < 0$ ).

Fig. 30. Plages de stabilité d'un gyroscope lourd asymétrique avec assujettissement statiquement instable et rotation autour de l'axe du moment d'inertie principal moyen.

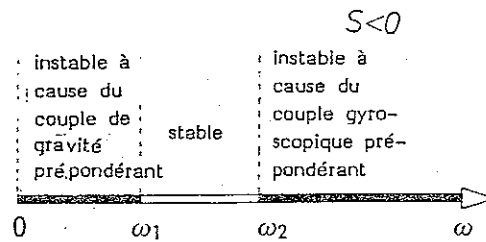
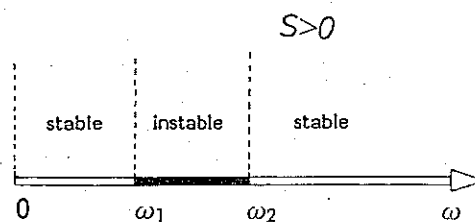


Fig. 31. Plages de stabilité d'un gyroscope lourd asymétrique avec assujettissement statiquement stable et rotation autour de l'axe du plus petit moment d'inertie principal.



L'expérience avec un assujettissement statiquement stable peut naturellement aussi être exécutée avec une liaison par ressort. Dans ce cas on montre que le gyroscope est instable pour des vitesses de rotation élevées et stable par contre pour des vitesses faibles.

**c) L'axe de la figure est l'axe du plus petit moment d'inertie principal**

Nous allons enfin exécuter des expériences en ajoutant au grand poids additionnel placé sur un côté, un des deux petits poids additionnels que nous plaçons sur l'autre côté du cadre intérieur. Par conséquent, l'axe du gyroscope devient l'axe du plus petit des trois moments d'inertie principaux.

Pour un assujettissement statiquement stable (grand poids en bas) le gyroscope doit être stable pour des grandes vitesses de rotation vu que dans ce cas le gyroscope non assujetti est stable. De même le gyroscope doit être stable pour des petites vitesses de rotation par suite de l'influence prépondérante du couple de gravité stable. Entre les deux extrêmes, il existe toutefois une plage de vitesses de rotation pour laquelle le gyroscope devient instable et culbute. La fig. 31 donne un aperçu de ces conditions. Pour cette expérience, il convient de lancer le gyroscope un peu plus fortement pour atteindre la plage stable supérieure. Il faut procéder avec des précautions particulières, le gyroscope étant encore très près de la limite de la stabilité. Si on veut obtenir avec certitude la plage supérieure stable, les moments d'inertie doivent être agrandis en ajoutant d'autres poids additionnels



(plastiline). Lors du ralentissement lent des vitesses de rotation, les oscillations des nutations deviennent toujours plus fortes jusqu'à ce que finalement le gyroscope culbute. Cette instabilité se maintient pour une plage étendue de vitesse de rotation. Seulement pour des vitesses de rotation relativement faibles, le gyroscope redevient stable. Pour un assujettissement statiquement instable (grand poids en haut) nous obtenons des mouvements stables pour des très grandes vitesses de rotation (forces gyroscopiques prépondérantes) mais par contre une instabilité pour des petites vitesses de rotation (forces de gravité prépondérantes), ce que d'ailleurs on escomptait. Ceci aussi peut être démontré clairement par l'expérience.

Là aussi l'assujettissement statiquement stable peut être réalisée par des ressorts. Pour cela, nous assujettissons le cadre intérieur de la façon la plus appropriée à l'aide de la paire de ressorts N°4 (ressorts faibles) et le cadre extérieur avec la paire de ressort N°3. Puis on lance le gyroscope et on observe le ralentissement. Les oscillations deviennent, dans une plage déterminée des vitesses de rotation, tellement fortes que le gyroscope doit être arrêté car il culbuterait et détériorerait les ressorts. Après avoir traversé cette plage de vitesses de rotation, d'ailleurs relativement petite, le gyroscope redevient stable. Il faut signaler que l'assujettissement par des forces différentes des deux cadres à cardan influence les phénomènes de stabilité.

Les expériences de stabilité sur le gyroscope asymétrique traitées ici ont également une importance pratique pour l'étude des vibrations qui se produisent sur des moteurs d'avions suspendus élastiquement et à hélice bipale. L'axe de l'hélice d'avion est, à cause des grandes masses de l'avion qui participent aux oscillations, toujours l'axe du plus petit moment d'inertie principal. L'assujettissement est statiquement stable. Il en résulte, comme les expériences l'ont montrée, une plage complète de vitesses de rotation pour laquelle on peut s'attendre à des oscillations croissantes. Le problème du constructeur est de situer cette plage, par un choix judicieux de la constante élastique de la suspension des moteurs, telle qu'elle ne crée pas de perturbations en marche.

### 3.4 Le gyroscope asymétrique avec deux degrés de liberté

Lorsqu'on rend l'assujettissement dans un plan très rigide empêchant le gyroscope de se mouvoir dans ce plan, on obtient un pendule gyroscopique avec deux degrés de liberté seulement. Là aussi des plages instables peuvent se présenter.

Pour exécuter les expériences on commence par assujettir le cadre extérieur en bloquant la vis moletée sur le socle de l'appareil. Le cadre intérieur est assujetti

au cadre extérieur fixe en y accrochant la paire de ressorts N°1 (assujettissement vigoureux). Le gyroscope est utilisé sans poids additionnel. Il faut veiller pendant cette expérience à ce que la planche du socle soit bien appliquée sur la table. La moindre instabilité doit être éliminée en calant l'appareil avec des coins. Pour cette expérience on lance le gyroscope modérément fort et on observe le ralentissement. Là aussi de fortes oscillations apparaissent dans une plage déterminée des vitesses de rotation. Le gyroscope doit ensuite être maintenu pour éviter une détérioration des ressorts. Après passage de la plage critique le gyroscope redevient stable.

Le système représente dans cette expérience rien d'autre qu'un oscillateur, dont le moment d'inertie oscille périodiquement. Lorsque les poids du disque se trouvent sur le dessus ou le dessous du disque, le moment d'inertie est grand, lorsqu'ils se trouvent à droite ou à gauche de celui-ci, le moment d'inertie est petit. Pendant une rotation du disque gyroscopique le moment d'inertie traverse deux fois son maximum et son minimum. De tels systèmes à moment d'inertie à variation périodique se retrouvent souvent en pratique, par exemple dans tous les moteurs à piston. Les parts, fournies au moment d'inertie autour de l'axe du moteur par les parties du piston dans leur mouvement alternatif, sont différentes suivant la position de l'axe. Par conséquent, le moment d'inertie varie périodiquement. Mais ces mêmes phénomènes peuvent aussi se présenter avec des systèmes à assujettissement variable. Ainsi on a observé, sur des locomotives à entraînement électrique, lors de leur fonctionnement, des importants phénomènes d'oscillations dont l'origine était la suspension élastique de l'entraînement de l'arbre d'embrayage se modifiant avec la position des roues.

Ce qui est intéressant, c'est que la plage instable précédemment observée lors de l'expérience disparaît immédiatement lorsque l'assujettissement rigide du cadre extérieur est supprimé. Le gyroscope retrouve alors sa tranquillité de marche pour toutes les vitesses de rotation. Apparemment rien n'a été modifié dans l'expérience car le gyroscope n'utilise absolument pas sa liberté retrouvée autour de l'axe verticale. Le seul fait de retrouver sa liberté suffit à le tranquilliser et à supprimer l'instabilité.

### **3.5 Réglage d'un corps asymétrique oscillant dans l'axe du plus grand moment d'inertie**

L'expérience décrite ici fait partie normalement du domaine de l'étude supérieure des vibrations - comme d'ailleurs l'expérience du chapitre précédent et celle du chapitre suivant -, étude très voisine d'ailleurs du domaine de l'étude des effets gyroscopiques et qui se chevauche en certains points. Un corps asymétrique réagit

à une oscillation provoquée par l'extérieur en cherchant à ramener l'axe de son plus grand moment d'inertie principal vers l'axe de l'oscillation imposée. Une expérience va nous le rendre visible.

Le gyroscope est, dans ce but, ou bien assujéti rigidement à l'axe extérieur à Cardan ou simplement retenu à la main. On accroche entre le cadre intérieur et le cadre extérieur des ressorts pas trop faibles (soit la paire de ressort N°2) afin que le système soit assujéti élastiquement autour de l'axe à Cardan intérieur. Le disque gyroscopique n'est pas lancé pour cette expérience. Il devrait plutôt être complètement immobile au début de l'expérience. Si maintenant, on percute le cadre intérieur, il exécute des oscillations autour de l'axe à Cardan intérieur. Le corps asymétrique (disque gyroscopique) subit ainsi une oscillation imposée par l'extérieur. Le disque commence immédiatement à tourner pour permettre aux poids-disques de se situer à la plus grande distance de l'axe à Cardan intérieur, car dans cette position l'axe du plus grand moment d'inertie principal rejoint l'axe de l'oscillation imposée. Par suite de son inertie, le disque oscille encore au-delà de cette position, rebrousse chemin et exécute des oscillations qui s'amortissent autour de la position d'équilibre nommée pour s'arrêter finalement après un certain temps dans cette position.

Cette expérience peut être réalisée avec différentes positions de départ du disque. Dans chaque cas, l'axe du plus grand moment d'inertie principal (axe A de la fig. 75) rejoint par rotation l'axe de l'oscillation imposée. L'expérience réussit parfaitement lorsque le cadre intérieur exécute de fortes oscillations, toujours obtenues grâce à un assujétissement de rigidité correspondante et une percussion suffisamment forte.

L'expérience est importante, par exemple, pour la compréhension de l'erreur de roulis des navires et des compas gyroscopiques. Un navire subissant le roulis maintient difficilement son cap particulièrement lorsque ses axes principaux (axe longitudinal et transversal) ne concordent pas avec la ligne des crêtes des vagues; l'axe du plus grand moment d'inertie (axe transversal) cherchant à ce moment là à se ramener dans l'axe de l'érecteur (ligne des crêtes des vagues). (Indépendamment de ceci, s'y ajoutent encore des forces hydrodynamiques qui compliquent énormément le comportement global).

Avec un compas gyroscopique qui représente - particulièrement dans sa forme primitive de compas monogyroscopique - toutes les caractéristiques d'un appareil asymétrique, des indications fortement entachées d'erreur peuvent se présenter, sur des navires subissant le roulis, le gyroscope cherchant à ramener par rotation oscillante l'axe de son plus grand moment d'inertie principal dans l'axe du roulis. Cette erreur de roulis a seulement été éliminée resp. ramenée à des valeurs acceptables lorsque le compas a été constitué d'un système approximativement symétrique en utilisant trois gyroscopes.

### 3.6 Découplage des oscillations d'un corps symétrique en cas d'oscillations autour des axes des moments d'inertie principaux

Commençons avec une expérience: Le gyroscope est assujéti fortement autour de l'axe à Cardan intérieur (soit la paire de ressorts N°2) et faiblement autour de l'axe à Cardan extérieur (paire de ressorts N°3 ou 4). En outre, on doit empêcher la rotation du disque gyroscopique autour de son axe à l'aide, par exemple, de bandes collantes. Le disque gyroscopique doit donc conserver pendant les essais la position fixée précédemment par rapport au cadre intérieur.

On provoque maintenant par percussion des oscillations du cadre intérieur autour de l'axe de Cardan intérieur de telle façon que dans la mesure du possible aucun couple n'agisse autour de l'axe de Cardan extérieur. Ceci s'obtient facilement après un peu d'entraînement. On observe les oscillations du cadre extérieur pour différentes positions du disque gyroscopique. À la suite de cette expérience on constate: le système ne peut exclusivement osciller autour de l'axe de Cardan intérieur que dans le cas où cette axe est un axe d'inertie principal. Par conséquent, seulement dans les cas où l'axe A ou l'axe B de la fig. 25 coïncide avec l'axe de Cardan intérieur, il est possible de provoquer des oscillations pures du cadre intérieur, sans qu'en même temps, le cadre extérieur soit entraîné dans les oscillations. Pour toute autre position du disque gyroscopique, on constatera toujours, des oscillations autour des deux axes malgré une percussion faite avec dextérité.

D'une façon générale, on peut dire: Les mouvements d'un corps asymétrique avec plusieurs degrés de liberté ne sont désaccouplés que si le corps exécute des oscillations autour d'un seul de ses axes de moment d'inertie principal.

Cette expérience a surtout une importance pratique dans les problèmes de suspension élastique d'appareils sensibles à la direction (p. ex. compas ou gyroscope directionnel). On essaye souvent par une suspension élastique d'éviter aux appareils très sensibles les oscillations perturbatrices extérieures. Cette suspension doit néanmoins répondre à deux conditions: en premier lieu, le point moyen de la suspension élastique doit se confondre avec le centre de gravité de l'appareil (car autrement toute accélération linéaire provoque des oscillations torsionnelles), en second lieu, les axes principaux de la suspension élastique doivent coïncider avec les axes principaux d'inertie, car autrement, - comme l'a montré l'expérience présente - chaque oscillation torsionnelle autour d'un axe a pour conséquence de provoquer des oscillations de couplage.

### 3.7 L'influence de l'inertie du cadre

L'inertie du cadre de Cardan joue pour le gyroscope asymétrique également un certain rôle. En excluant les influences quantitatives qui doivent être prises en considération, par exemple, pour le calcul des fréquences de nutation, l'inertie du cadre modifie le comportement de la stabilité. La stabilité du gyroscope à Cardan dépend en effet non seulement des rapports des moments d'inertie, mais également de la position respective du système à Cardan. Comme déjà indiqué dans le cas du gyroscope symétrique, l'inclinaison du cadre intérieur a aussi sur le gyroscope asymétrique une importance décisive. Le gyroscope, stable en position normale peut, dans certaines plages d'inclinaison devenir instable.

Avant d'expliquer cet effet, décrivons d'abord l'expérience. Nous utilisons, pour commencer, le modèle sans poids additionnels. En position normale, pour laquelle les plans des deux cadres sont orthogonaux entre-eux, les rotations du rotor autour de son axe sont stables. Ceci a déjà été démontré au chapitre 3.2. Nous augmentons progressivement l'inclinaison du cadre intérieur et nous libérons le gyroscope après chaque nouvelle inclinaison. On constate que le système après dépassement d'une inclinaison  $\beta_1$  déterminée devient instable, de sorte que le gyroscope culbute complètement sans qu'il soit nécessaire d'effectuer une percussion particulière. Si on renouvelle l'expérience avec une inclinaison de plus en plus grande, on constate qu'au delà d'une autre valeur limite  $\beta_2$  de l'inclinaison, des rotations stables redeviennent possibles. La constatation expérimentale est en conséquence la suivante: Si l'angle d'inclinaison  $\beta$  du cadre intérieur se trouve entre des valeurs limites déterminées  $\beta_1$  et  $\beta_2$ , les rotations du rotor autour de son axe de figure sont instables. La condition d'instabilité est donc:

$$\beta_1 < \beta < \beta_2$$

Pour des valeurs plus petites ou plus grandes de  $\beta$ , c.à.d. pour  $\beta < \beta_1$  ou  $\beta > \beta_2$  le gyroscope reste stable. Nous renouvelons maintenant l'expérience après avoir fixé les petits poids additionnels sur le cadre intérieur. Dans ce cas, nous avons pour la position normale  $\beta = 0$  un comportement instable. Toutefois, on peut facilement remarquer en faisant varier l'inclinaison que des rotations stables sont possibles dans la mesure où l'inclinaison est plus grande que la valeur limite  $\beta_3$ . En augmentant encore davantage l'inclinaison, le système reste stable. L'expérience indique donc une instabilité pour  $\beta < \beta_3$  et une stabilité pour  $\beta > \beta_3$ .

Si on renouvelle l'expérience avec les grands poids additionnels, la stabilité existe pour toute valeur de  $\beta$ .

Pour expliquer ce comportement reprenons les indications du chapitre 3.2 qui disaient que les rotations sont instables lorsque celles-ci s'effectuent autour de l'axe du moment d'inertie principal moyen. Nous avons désigné le moment d'inertie autour de l'axe du rotor par  $J_z$ . Si l'on désigne maintenant les moments d'inertie principaux autour des axes principaux A et B visibles sur la fig. 75 (Annexe) par  $J_A$  et  $J_B$  la condition d'instabilité peut être exprimée par la double inéquation:

$$J_A > J_z > J_B. \quad (8)$$

Dans un gyroscope à suspension à la Cardan, les cadres de Cardan contribuent aussi aux moments d'inertie autour des axes transversaux. Ces contributions sont différentes suivant la position angulaire du rotor et suivant l'inclinaison du cadre intérieur. L'influence de la position du rotor peut être éliminée en effectuant le calcul avec certaines valeurs moyennes ou valeurs effectives  $J_{Aeff}$  et  $J_{Beff}$ , qui elle-mêmes redépendent des moments d'inertie du rotor et du cadre, mais également de l'angle d'inclinaison  $\beta$ . Un calcul de ces valeurs effectives conduit aux courbes représentées sur la fig. 32. Leur allure correspond complètement à la courbe déjà montré sur la fig. 22 concernant le gyroscope à cardan symétrique.

Fig. 32. Les moments d'inertie effectifs du gyroscope à Cardan asymétrique dans le cas  $J_z > J_{A_0} > J_{B_0}$ .

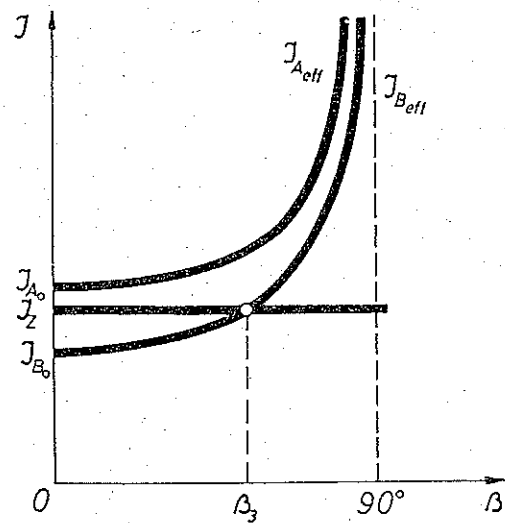
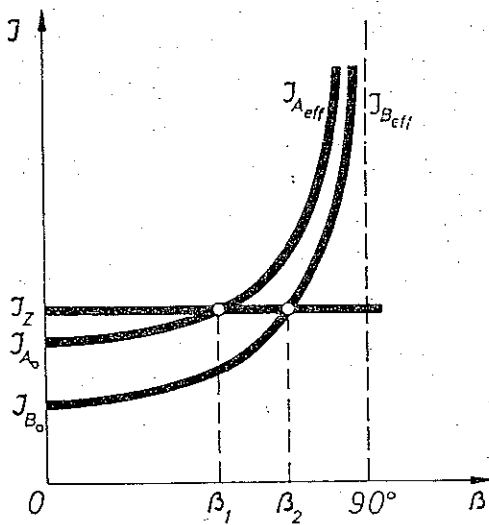


Fig. 33. Les moments d'inertie effectifs du gyroscope à Cardan asymétrique dans le cas  $J_{A_0} > J_z > J_{B_0}$ .

Le moment d'inertie du rotor  $J_z$  est indépendant de l'inclinaison du cadre. Si on le reporte sur le diagramme de la fig. 32, on obtient une droite horizontale. Elle coupe les courbes de  $J_{Aeff}$  et  $J_{Beff}$  aux points de valeur  $\beta = \beta_1$  et  $\beta = \beta_2$ . Pour de petits angles d'inclinaison  $\beta < \beta_1$ ,  $J_z$  est plus grand que les deux moments d'inertie effectifs. Si le rotor tourne autour de son axe de la figure, cette rotation correspond alors à celle autour de l'axe du plus grand moment d'inertie; elle est stable. Dans le cas  $\beta_1 < \beta < \beta_2$  la valeur de  $J_z$  se situe entre les deux autres valeurs. On remplit ainsi la condition d'instabilité (8) dans la mesure où l'on remplace dans la formule les moments d'inertie  $J_A$  et  $J_B$  par les valeurs effectives correspondantes. En utilisant ces valeurs effectives, on peut donc transposer au gyroscope à Cardan, les règles applicables à un corps unique. Pour des inclinaisons  $\beta > \beta_2$ ,  $J_z$  devient, le plus petit des trois moments d'inertie et les rotations redeviennent stables.

Les courbes de la fig. 32 sont valables pour le modèle sans poids additionnels. En ajoutant des poids additionnels, les moments d'inertie autour des axes transversaux deviennent plus grands, tandis que  $J_z$  reste inchangé. Le diagramme prend l'allure de la fig. 33. Comme  $J_{Aeff} > J_z$ , la droite horizontale possède un seul point d'intersection de valeur  $\beta = \beta_3$  avec la courbe  $J_{Beff}$ . Pour des plus petites valeurs de  $\beta$  la condition d'instabilité (8) est remplie: pour des inclinaisons plus prononcées, la rotation a lieu autour de l'axe du plus petit des moments d'inertie, de sorte que nous nous retrouvons en présence d'une stabilité. En utilisant les grands poids additionnels les courbes des moments d'inertie effectifs émigrent tellement vers le haut qu'il n'existe plus de points d'intersection avec la droite  $J_z$ . Nous nous trouvons alors en stabilité permanente parce que la rotation autour de l'axe du rotor correspond dans ce cas toujours à une rotation autour de l'axe du plus grand moment d'inertie principal.

## 4. LES PHENOMENES GYROSCOPIQUES

Les lois gyroscopiques traitées jusqu'à présent font partie inhérente de la vie quotidienne. Nous les rencontrons en technique partout où il existe des pièces tournantes: par exemple sur les véhicules et les moteurs et même dans le sport et le jeu. Expliquer ces phénomènes gyroscopiques à l'aide des connaissances générales acquises dans les chapitres précédents, tel sera à présent notre objectif. Vu le nombre important d'effets gyroscopiques qui se présentent, nous ne pouvons prétendre traiter ici l'intégralité de ces phénomènes. Au contraire, nous allons en extraire quelques cas typiques mais articulièrement intéressants et les décrire et expliquer. Les lecteurs qui désireraient approfondir la matière sont priés de se reporter aux ouvrages indiqués dans le répertoire bibliographique.

Seul le rotor symétrique sera employé dans les expériences, avec le modèle de gyroscope, décrites dans ce chapitre. La disposition des poids-disques est en conséquence à choisir suivant la fig. 74.

### 4.1 Disque, rond de bière et boomerang

Un bel exemple de conservation de direction de l'axe d'un gyroscope presque complètement exempt de forces nous est offert par le jet du disque. Un disque correctement lancé tourne autour de son axe de symétrie. Comme il possède un moment d'inertie important (l'extérieur du disque est cerclé d'un anneau en fer), un disque en rotation représente un gyroscope avec un moment cinétique remarquable. Les couples des forces aérodynamiques qui agissent sur le disque pendant le jet sont tellement faibles qu'ils ne peuvent engendrer qu'une précession lente et imperceptible de l'axe gyroscopique. Le disque conserve donc, pendant sa trajectoire, pratiquement son plan de lancement d'origine et son vol est approximativement celui représenté schématiquement sur la fig. 34. Par suite de sa trajectoire courbe, le disque subira, sur une seule face l'influence de l'écoulement d'air, et ceci déjà sur la dernière

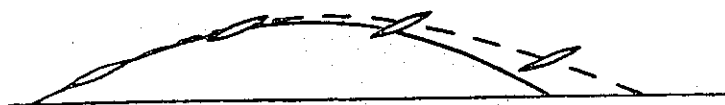


Fig. 34. La trajectoire du disque.



portion de la branche ascendante, mais surtout sur la branche descendante de la trajectoire. Il possède un certain angle d'attaque et agit, par conséquent, comme une surface portante. Ceci a pour conséquence que le disque correctement lancé, vole plus loin que la parabole d'un projectile correspondant (courbe en trait plein de la fig. 34). Il "plane" plutôt suivant la courbe représentée en traits interrompus. (Remarquons accessoirement que si le disque est mal lancé, on peut souvent observer de beaux mouvements de nutation si le disque "fasseille" (bat au vent)).

Les forces aérodynamiques allongent donc la portée du disque lancé, mais elles ne provoquent pas de modification dans la direction de l'axe cinétique grâce au grand moment cinétique. Les conditions changent, lorsque le moment cinétique du disque devient plus faible. Pour un tel essai, le rond de bière se reète remarquablement. Le rond de bière lancé, tournant sur lui-même, conserve d'abord la direction de son axe de symétrie (axe cinétique). Toutefois, s'il reçoit, par suite de la courbure de sa trajectoire, une incidence, des forces aérodynamiques vont être engendrées qui - contrairement au disque - ne seront pas plus petites que les forces gyroscopiques. Abstraction faite que le rond de bière agit aussi en surface portante, c.à.d. qu'il plane, il subit, en outre, un couple qui par son action cherche à faire pivoter le disque autour de l'axe A-A représenté sur la fig. 35, dans le sens de

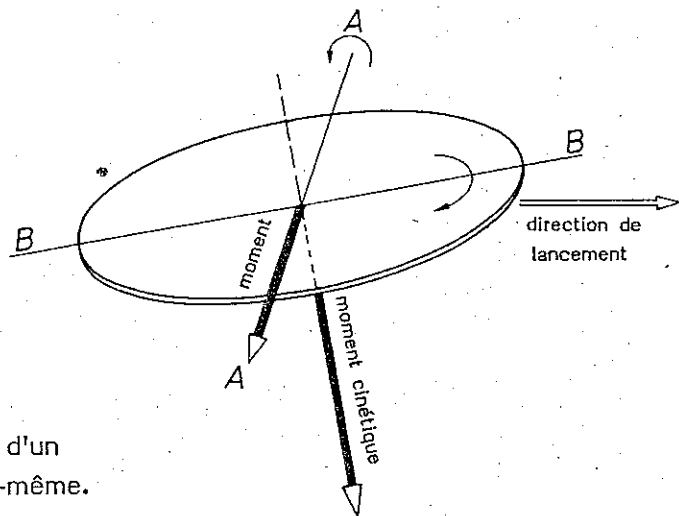


Fig. 35. Explication du comportement d'un disque lancé tournant sur lui-même.

la flèche du dessin. Le gyroscope réagit à ce couple, en cherchant à ajuster, le plus rapidement possible, son axe cinétique tournant dans le même sens, et dirigé vers le bas pour un gyroscope tournant à droite, avec le couple agissant des forces aérodynamiques. Le disque va donc (pour un observateur situé à l'arrière) pivoter à gauche autour de l'axe B-B. En général, on obtiendra la trajectoire suivante: Le "rond de bière", lancé tournant sur lui-même, vole d'abord dans la direction de lancement sur un parcours déterminé. Puis, à la suite de l'angle d'incidence obtenu entretemps, il s'élève néanmoins plus haut que la trajectoire correspondante

d'un projectile. En même temps il amorce une lente rotation à gauche du plan du disque. Cette rotation le fera un peu dévier vers la gauche puisque les forces aérodynamiques le tirent aussi, à présent, vers le côté. Finalement lorsque le rond de bière s'est mis, par suite de la rotation latérale, en position verticale, il tombe le plus souvent, subitement.

Dans le cas d'un rond de bière lancé par un gaucher, les mêmes phénomènes interviennent, toutefois, avec le signe inverse. - Une expérience très simple mais très enrichissante, qui avec certaines précautions peut aussi être exécutée dans un local fermé.

L'action simultanée des forces gyroscopiques et des forces aérodynamiques est dans le cas du boomerang encore plus compliquée que lors du jet du rond de bière. Par la conception astucieuse de sa forme (planche plate légèrement vrillée en forme de crochet dont la section a une forme aérodynamique), la trajectoire d'un boomerang correctement lancé, n'a plus aucune similitude avec la parabole d'un projectile. De plus, on peut obtenir avec un boomerang des portées du jet nettement plus grandes qu'avec, par exemple, une pierre de même poids. Le phénomène le plus surprenant avec le boomerang c.à.d. son retour à son point de départ, peut s'expliquer par la réaction des forces aérodynamiques sur le moment cinétique gyroscopique du boomerang tournant sur lui-même et l'influence résultante sur la trajectoire. Pour de plus amples détails, il convient, toutefois, de se reporter aux explications détaillées de ce problème dans le livre de Schuler (répertoire bibliographique N°3).

## 4.2 La déviation latérale des projectiles

L'action simultanée des forces gyroscopiques et aérodynamiques permet aussi d'expliquer le fait, que des projectiles longs en rotation dévient latéralement du plan vertical déterminé par la ligne de tir. Des projectiles sans moment cinétique sont instables pour des formes usuelles de projectiles. Les forces aérodynamiques engendrées sur la trajectoire du tir feraient immédiatement basculer le projectile. Ce défaut est éliminé en communiquant au projectile un certain moment cinétique le long de son axe longitudinal. Néanmoins, ce moment cinétique ne doit pas devenir trop grand, sinon le projectile resterait pratiquement stable en direction et l'inclinaison longitudinale d'origine serait conservée jusqu'à l'objectif. En proportionnant correctement le moment cinétique, on peut donc obtenir que l'axe longitudinal du projectile garde au moins approximativement la direction de la trajectoire de tir. Le couple des forces aérodynamiques cherche à culbuter le projectile autour de l'axe transversal, horizontal, exactement comme dans le cas du rond de bière. Le gyroscope réagit à ce couple avec une précession qui fait dériver la pointe du projectile latéralement en dehors du plan de la trajectoire de tir, et ce à droite pour des

projectiles avec moment cinétique à droite et à gauche pour des projectiles avec moment cinétique à gauche, comme on peut facilement l'expliquer par la loi de la tendance au parallélisme de même sens des axes de rotation. Par cette dérive latérale du projectile en dehors de son plan de trajectoire de tir, il s'en suit une modification de la direction du couple des forces aérodynamiques ainsi que celle de la direction ultérieure du mouvement de l'axe cinétique. Le projectile décrit de ce fait un genre de cône de précession. Ce qui est important pour la compréhension de la déviation latérale des projectiles est donc le fait que l'axe du cône de précession, qui en effet coïncide avec la direction du tir, se décale, également, par suite de la courbure de la trajectoire. Si la modification de la direction du tir s'exécute plus lentement que le mouvement de précession du projectile, celui-ci pourra néanmoins décrire complètement son cône de précession. Toutefois, l'angle du sommet du cône sera dans le cas du projectile à moment cinétique à droite plus grand vers la droite, que vers la gauche, de sorte que le milieu de l'axe longitudinal du projectile dévie du plan de la trajectoire de tir vers la droite. Par contre, si la vitesse de précession est plus lente que la rotation dans la trajectoire, le projectile ne peut pas décrire complètement son cône de précession, mais déviara dès le début vers la droite. Dans les deux cas, la force aérodynamique provoque une dérive latérale vers la droite du projectile en position inclinée.

Aux mouvements de précession traités ici s'ajoutent, en réalité, encore des nutations du projectile qui compliquent davantage les phénomènes. Mais une étude de ces subtilités nous conduirait trop loin.

A l'aide d'une expérience très simple, on peut représenter, au moins quantitativement, la dérive latérale de tir. Pour ce faire, nous devons simuler l'effet des forces aérodynamiques d'une manière quelconque. Nous le réaliserons par un assujettissement statiquement instable du gyroscope à l'aide d'un ressort. On visse d'abord, comme le montre la fig. 36, l'étrier du ressort sur un côté de l'axe sortant du cadre intérieur. On accroche, entre l'extrémité de l'étrier et le petit anneau fixé sur le cadre extérieur, un ressort faible. Ce ressort a le même effet sur le gyroscope que les forces aérodynamiques sur le projectile. Il cherche, en effet, à faire tourner le gyroscope lors d'une petite déviation autour de la direction de celle-ci. Lorsque l'axe du gyroscope est en position horizontale, le couple du ressort est nul, de la même façon que les forces aérodynamiques n'exercent aucun couple sur un projectile se trouvant avec son axe longitudinal dans la direction de la trajectoire de tir. Le couple commence seulement à agir lorsque la direction du tir et l'axe du projectile s'écartent entre eux. La courbure résultante de la trajectoire de tir est simulée dans l'expérience, en inclinant le socle de l'appareil de façon que cette inclinaison corresponde à celle de la trajectoire de tir, le mieux, en soulevant lentement le bord arrière du cadre (fig. 36). Après avoir préparé l'appareil (accrochage du ressort) le gyroscope (gyroscope symétrique sans poids additionnels!) est lancé avec son axe en position horizontal. Cette position correspond à celle d'un projectile tiré horizontalement. Dans les tout premiers instants, le ressort n'exerce aucun cou-

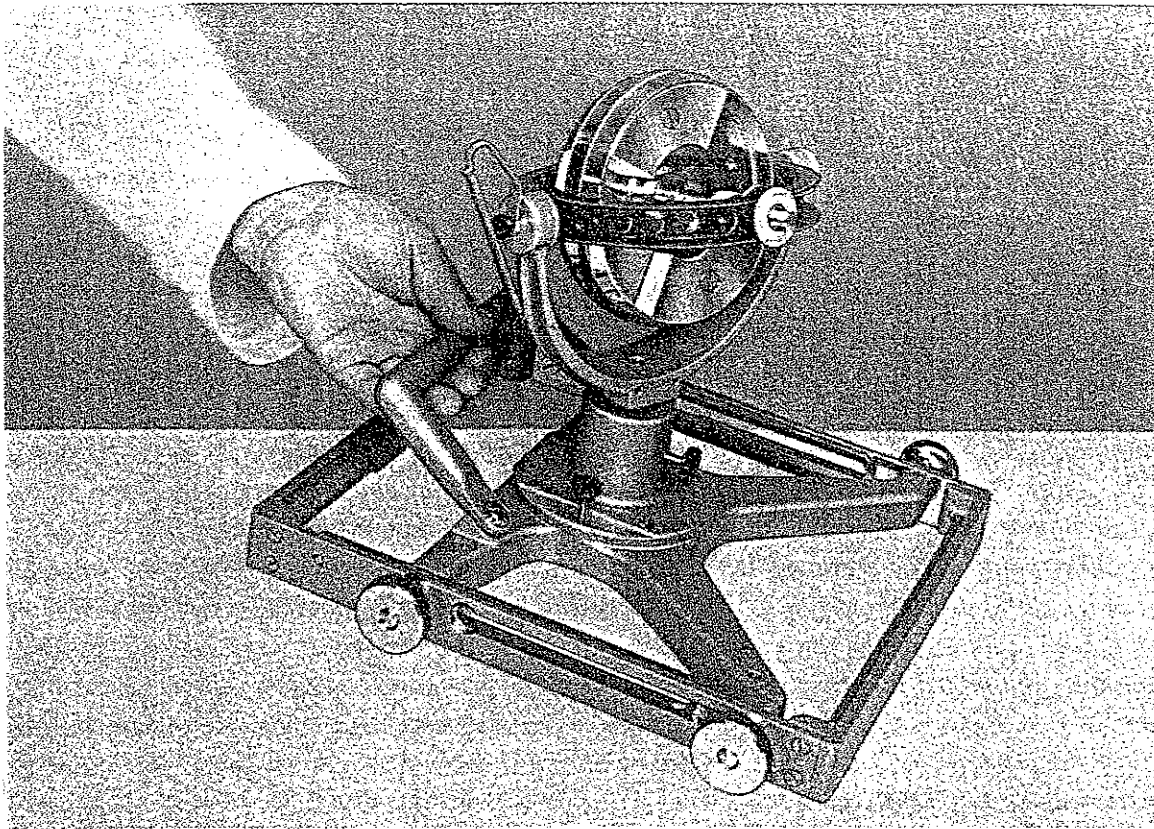


Fig. 36. Expérience pour l'explication de la déviation latérale des projectiles.

ple, l'axe du gyroscope (axe du projectile) et le socle (plan constitué par la direction du tir et les horizontales qui lui sont perpendiculaires) étant parallèles. On relève, maintenant, lentement la cadre par l'arrière, d'un angle correspondant à la variation angulaire dans le temps de l'inclinaison de la trajectoire de tir. Le ressort engendre alors un couple auquel le gyroscope répond par une précession. Cette précession fait dévier, dans le cas d'un gyroscope tournant à droite (moment cinétique à droite) la pointe du projectile vers la droite; vers la gauche dans le cas d'un moment cinétique à gauche. Les forces aérodynamiques agissant sur le projectile en position inclinée provoquent une dérive qui se fait remarquer finalement par un décalage latéral sur l'objectif visé.

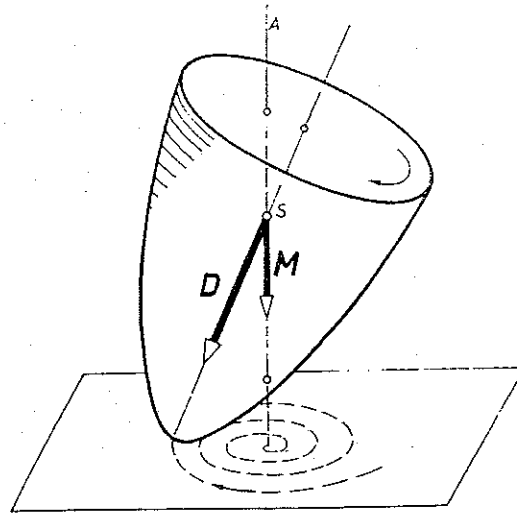
Pour l'exécution de l'expérience, le gyroscope est fortement lancé. Le mieux est d'arrêter l'expérience après une dérive du gyroscope d'environ 20 à 30 degrés, car au-delà les conditions d'expérience ne correspondent plus aux conditions réelles.

### 4.3 La toupie, le cerceau d'enfant et la bicyclette

Le jouet d'enfant bien connu, c.à.d. la toupie effectuant ses danses sur un plan horizontal, engendre toute une série de phénomènes gyroscopiques intéressants. Déjà le fait que la toupie tournant assez rapidement, danse d'une façon stable et ne tombe pas s'explique facilement par le mouvement de précession. Exactement comme dans le cas des forces aérodynamiques agissant sur un projectile, la force de pesanteur cherche à renverser la toupie. La pesanteur exerce donc un couple auquel le gyroscope (la toupie) réagit, comme il est connu, par une déviation perpendiculaire à la direction du mouvement que la force de pesanteur cherche à lui imposer. Comme la direction du couple se modifie continuellement avec la direction de l'axe de la toupie, celui-ci décrit un cône de précession dont l'axe de symétrie est la direction verticale. Cette expérience correspond exactement aux phénomènes décrits lors de l'étude du pendule gyroscopique symétrique avec un assujettissement statiquement instable (chapitre 2.5 b). Aussi, dans le cas de la toupie, la stabilité n'est assurée que pour une rotation suffisamment rapide de celle-ci. En-dessous d'une vitesse de rotation déterminée, la toupie tombe, et d'autant plus rapidement que le centre de gravité de la toupie est situé plus haut par rapport au plan de base et que la toupie elle-même est plus élancée (rapport des moments d'inertie!).

Contrairement aux expériences avec le modèle de gyroscope, il n'existe pas de point fixe chez la toupie. Il faut uniquement que le point d'appui, donc la pointe de la toupie, se trouve dans le plan horizontal. Ce type différent d'appui (de suspension) a pour conséquence de produire un effet totalement différent des forces de frottement. Tandis que sur le modèle de gyroscope à suspension à la Cardan avec assujettissement statiquement instable, l'angle au sommet du cône de précession devient constamment plus grand par suite des influences de frottement dans les suspensions à la Cardan, la toupie dansant sur une base plane se redresse par suite des forces de frottement que subit sa pointe sur la base d'appui. Le cône de précession décrit par la toupie devient donc toujours plus mince jusqu'à ce que finalement l'axe de symétrie de la toupie vienne mourir en position verticale de repos (elle "dort"). Ce phénomène s'explique à l'aide du théorème du parallélisme de même sens des axes de rotation. Sur un plan horizontal, les forces de frottement agissant sur la pointe de la toupie produisent deux effets. Premièrement, la vitesse de rotation de la toupie est un peu freinée. Cet effet est d'abord d'importance secondaire, la toupie et le plan d'appui ne se touchant qu'en un seul point, donc sur une toute petite surface. Deuxièmement, la pointe de la toupie inclinée cherche à se déplacer par roulement dans le sens de sa rotation sur le plan d'appui (frottement de roulement!). Elle impose par là à la toupie une rotation autour de l'axe vertical passant par le centre de gravité  $S$  (fig. 37). La toupie cherche alors à amener son axe cinétique  $D$ , tournant dans le même sens, vers l'axe imposé et en conséquence se redresse. Ce redressement ne s'effectue pas immédiatement à cause de l'action

Fig. 37. La toupie.



simultanée du couple de gravité. La pointe de la toupie décrit plutôt sur le plan d'appui une spirale qui converge de plus en plus vers son centre. Après redressement complet de la toupie, le couple de rétablissement disparaît, parce que le bras de levier correspondant s'annule. Il ne reste alors que la première quote-part provenant du couple de frottement qui freine de plus en plus la toupie. Si la vitesse de rotation tombe de ce fait en-dessous de la valeur assurant la stabilité, la toupie tombe en exécutant des mouvements très bizarres constitués par des précessions et des nutations.

Pendant une certaine époque, on était friand de la fameuse toupie nommée "Tippe-top" ou "toupie lève-toi". Ce jouet remarquable permet d'observer, particulièrement bien, le redressement. La toupie est constituée d'un corps de base de forme sphérique auquel on a coupé une calotte. A l'endroit de la section on a fixé une courte tige. Le centre de gravité se trouve légèrement en-dessous du centre de la sphère, de sorte que le corps non tournant prend une position, sur un plan horizontal, telle que représentée sur la fig. 38, à gauche. Si on lance, à présent, la toupie en la faisant tourner fortement par sa tige, elle commence immédiatement après sa libération à quitter sa position d'équilibre statiquement stable. Par suite du concours de la pesanteur, du frottement et des forces gyroscopiques, cette position devient dynamiquement instable. La toupie se renverse complètement, se met finalement sur la tige et continue à tourner d'une façon stable dans la position indiquée sur la fig. 38 à droite, aussi longtemps que le moment cinétique existant le lui permet.

Ce qu'il convient de noter c'est que le vecteur moment cinétique conserve dans cette expérience la même direction verticale par rapport à l'espace en phase initiale et finale. Par conséquent, il pivote de  $180^\circ$  par rapport au corps de toupie.

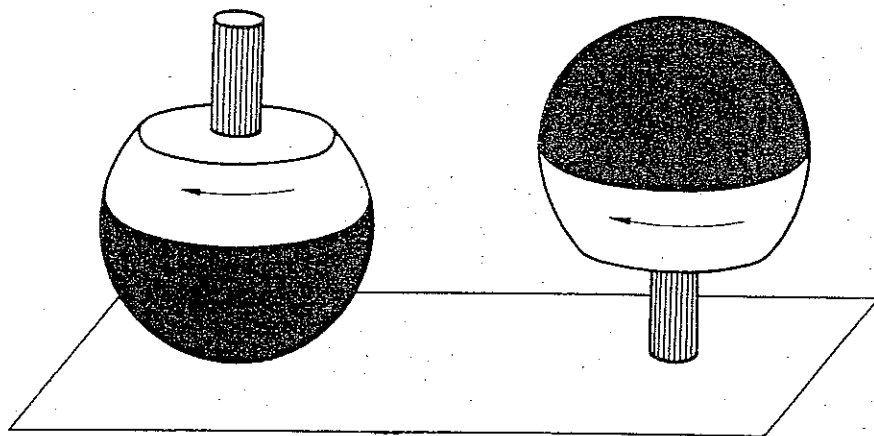


Fig. 38. Toupie "Relève-toi" avant et après le renversement.

On peut montrer le redressement d'un gyroscope dansant sur sa pointe d'une façon très probante avec des oeufs durs ou des pierres plates de forme elliptique comme on les trouve souvent dans les rivières ou à la plage. Si l'on pose ces corps sur le dessus d'une table, ils prennent une position dans laquelle le centre de gravité est situé le plus bas possible. Si l'on impose, maintenant, à l'oeuf ou à la pierre, dans cette position, une forte rotation autour de l'axe normal vertical, ils se redressent immédiatement par suite de l'effet des forces gyroscopiques et de frottement et tournent finalement autour de l'axe longitudinal respectivement axe du plus petit moment d'inertie principal.

D'ailleurs, on peut, grâce à cette expérience, distinguer facilement un oeuf cuit d'un oeuf non cuit. Un oeuf non cuit permet bien une rotation autour de son axe transversal, lorsqu'on le fait tourner le temps nécessaire pour que son contenu liquide se mette également en rotation. Mais jamais, un oeuf non cuit dansera sur la pointe, même lorsqu'il a été lancé très fortement. Les forces agissantes dans l'intérieur liquide de l'oeuf le renverseraient immédiatement après sa libération. Dans l'esprit de la définition donnée au départ, un oeuf non cuit ne représente, en effet, pas un gyroscope, son corps n'étant pas rigide. On ne doit donc pas transposer les lois gyroscopiques, hâtivement, à des corps non rigides ou liquides. Un oeuf cuit, par contre, n'est pas un corps rigide idéal, toutefois, les lois gyroscopiques peuvent encore être appliquées, les vitesses de rotation étant relativement faibles. L'oeuf dansant se redresse nettement plus rapidement que la toupie. Cela provient du plus grand rayon de la pointe ce qui engendre un plus grand couple de frottement. Par contre, une toupie avec une pointe très fine, dansant sur une plaque en verre, ne se redresse que très lentement, car le couple de frottement engendrant le redressement y est très faible.

La stabilité du cerceau d'enfant s'explique aussi par l'effet des forces gyroscopiques. Le cerceau roulant, comme, somme toute, chaque roue roulante, représente, en effet, un gyroscope avec un vecteur moment cinétique dirigé vers la gauche. Lorsque le cerceau est expulsé en dehors de son plan vertical, par une perturbation quelconque, un couple de gravité, engendré par suite d'un écartement du centre de gravité (centre du cerceau) de la verticale passant par le point d'appui, agit en cherchant à renverser le cerceau. Le gyroscope s'oriente ensuite, en tournant dans le même sens, vers l'axe du couple. Cette action est engendrée par une rotation autour de l'axe normal donc par modification de la direction de marche. Pour des cerceaux roulant suffisamment vite, le point d'appui arrive de cette manière à se replacer en dessous du centre de gravité, celui-ci ayant tendance à conserver la trajectoire qu'il vient de prendre. Toutefois, le point d'appui continue à se déplacer latéralement par suite de la modification de direction du plan du cerceau.

Un cerceau ou une roue tournant très rapidement ne se renversera donc pas sous l'effet de perturbations (inégalité de la trajectoire de roulement, etc.), mais subira uniquement une modification correspondante de sa direction. Toutefois, si le cerceau tourne lentement, ce qui, en général, est le cas avec des cerceaux d'enfant, l'énergie d'avancement ne suffit pas au centre de gravité pour poursuivre sa ligne droite. Le point d'appui n'arrive plus, dans ce cas, à se replacer sous le centre de gravité, mais rest toujours placé latéralement par rapport à celui-ci. Par suite d l'existence de la position inclinée permanente du cerceau, il y a aussi action permanente en cette position du couple de gravité correspondant, ce qui provoque une précession régulière autour de son axe normal. Le cerceau tourne alors en rond. Par suite de la diminution de la vitesse de roulement due au frottement au sol, et donc par là du moment cinétique, la vitesse de précession devient toujours plus grande, les cercles deviennent toujours plus serrés, jusqu'à ce que, finalement, le cerceau se renverse.

Il est intéressant de constater que les enfants jouant au cerceau savent tirer profit, après quelques exercices rapides, des lois gyroscopiques, pour donner une autre direction au cerceau. En effet, ils n'essayent pas de tourner le cerceau directement autour de l'axe normal, mais ils exercent une pression légère, latérale avec le baton sur la partie supérieure. Ils produisent alors un couple qui permet au gyroscope de faire un mouvement de précession dans la direction souhaitée.

Les mêmes forces qui dominent les jeux du cerceau des enfants, nous permettent aussi de rouler facilement en bicyclette. Les forces gyroscopiques sont en effet tellement favorables à faire tourner la roue-avant toujours dans un tel sens qu'une éventuelle déviation latérale du centre de gravité de sa position d'équilibre est de nouveau annulée. Rouler en bicyclette statiquement instable n'exige, par conséquence, pas d'adresse particulière. Le cycliste doit seulement apprendre à ne pas entraver davantage les forces gyroscopiques par des mouvements inadaptés. Les forces gyroscopiques remplissent leur office d'autant mieux que la bicyclette avance



plus rapidement, car alors, les forces gyroscopiques l'emportent nettement sur les forces de pesanteur dans le bilan des forces. Ceci explique l'expérience journalière de tout cycliste à savoir qu'il est plus facile de rouler vite que lentement.

Signalons, en passant, que la roue-avant est aussi soumise à une couple non dû aux forces gyroscopiques, mais qui exerce le même effet ce qui simplifie le fait de rouler en bicyclette. Ce couple est engendré par suite de la position du point d'appui de la roue-avant sur la route, situé derrière l'axe prolongé de la tige du guidon.

Nous ne pouvons pas approfondir, ici, plus amplement les phénomènes gyroscopiques très importants et intéressants qu'on peut encore constater sur les roues et jeux de roues. Les intéressés sont de nouveau renvoyés à la bibliographie correspondante.

#### 4.4 Le broyeur à meules et l'hélice d'avion

Les forces gyroscopiques agissent d'une façon particulièrement favorable dans le broyeur à meules. Essayons de l'expliquer sur un modèle simplifié et observons pour ce faire la disposition représentée sur la fig. 39: Une roue tournant librement autour

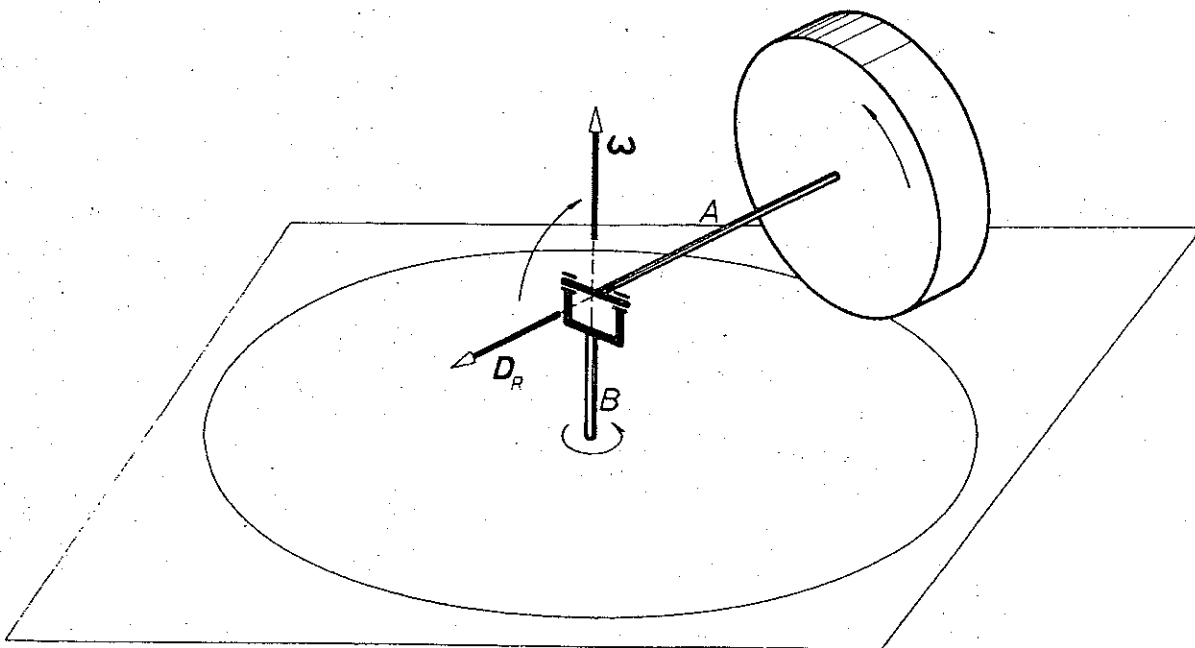


Fig. 39. Explication des effets gyroscopiques dans le broyeur à meules.

d'un axe horizontal A, peut rouler suivant un cercle sur une plaque de base horizontale. Ce mouvement est provoqué et maintenu par un entraînement forcé de l'axe A par l'intermédiaire d'un type d'articulation à Cardan fixé sur un axe B vertical et lui-même entraîné.

Soit une rotation autour de l'axe B s'effectuant avec une vitesse angulaire  $\omega$ , dont la flèche du vecteur est dirigé vers le haut. La roue développante possède dans ce cas, la quantité  $D_R$  du moment cinétique, dirigée suivant l'axe de la roue A et provenant du mouvement de roulement. Cette composante du moment cinétique modifie en permanence sa direction étant donné qu'elle accompagne l'axe A dans sa rotation. D'après les lois expliquées antérieurement, le système réagit à cette rotation forcée en essayant d'amener le vecteur moment cinétique  $D_R$  parallèle et de même sens à l'axe de la rotation forcée  $\omega$ . Dans notre cas, l'axe A a donc, par conséquent, tendance à se redresser suivant le sens de la flèche dessinée en trait fin. Il en résulte des forces de réaction qui d'une part poussent la chape de suspension vers le haut et d'autre part pressent la roue vers le bas. La composante de la force de réaction (force de poussée) citée en premier doit être absorbée par les paliers de l'axe d'entraînement B, la deuxième composante de la force engendre une pression plus forte de la roue sur la base, pression qui peut considérablement dépasser celle due au poids. Ce fait est utilisé pour produire dans les broyeurs à meules une plus forte pression de broyage. La construction d'un tel broyeur correspond en principe au croquis de la fig. 39, mais on utilise, en réalité, toujours deux roues de broyeur, décalées de  $180^\circ$  et dont les axes peuvent chacun pivoter sur lui-même.

Examinons un autre exemple d'effet gyroscopique de pièces tournantes à savoir l'avion monomoteur (fig. 40). Son hélice possède un vecteur moment cinétique dirigé

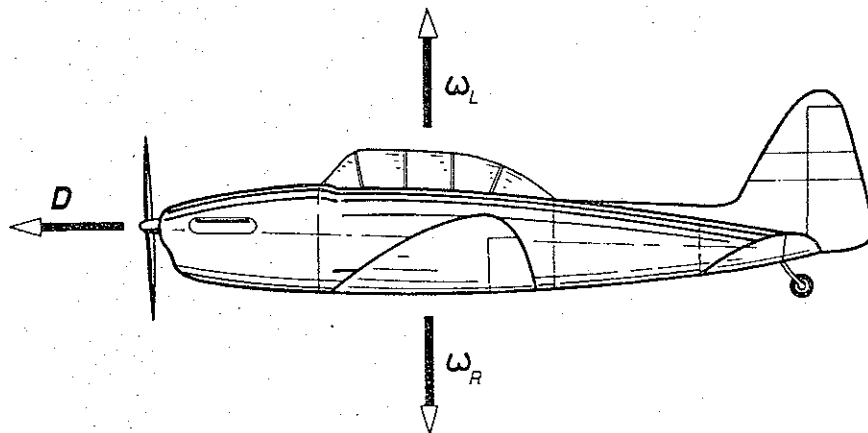


Fig. 40. Pour l'explication de l'effet gyroscopique de l'hélice.

dans la direction du vol, lorsque la rotation, vue du pilote, se fait vers la droite. Si l'avion exécute, maintenant, un virage, le vecteur moment cinétique  $D$  subira une rotation dans le plan horizontal. Suivant le sens de la direction de la rotation de la courbe, le vecteur  $\omega$  de la rotation forcée est dirigé vers le haut (virage à gauche) ou vers le bas (virage à droite). Par suite de la modification de direction imposée du moment cinétique, des forces gyroscopiques prennent naissance et celles-ci cherchent à amener le vecteur  $D$  parallèle et dans le même sens à la direction du vecteur  $\omega$ . Dans un virage à droite le nez de l'avion piquera vers le bas, tandis que dans un virage à gauche, l'effet contraire sera obtenu. De cette manière, on se trouve en présence d'un comportement de vol complètement différent suivant que l'avion exécute des virages à droite ou à gauche; un fait bien connu des pilotes expérimentés.

Avec des avions bi-moteurs cet effet peut être renforcé si les deux hélices tournent dans le même sens. Par contre, l'effet gyroscopique d'hélices tournant dans le sens contraire l'une par rapport à l'autre n'a plus d'influence sur le comportement en vol les forces gyroscopiques se compensant mutuellement. Toutefois, les forces complémentaires doivent être absorbées par la cellule de l'avion. La tendance, des hélices tournant dans le sens contraire l'une par rapport à l'autre, qui consiste à amener leurs vecteurs moment cinétique parallèles et de même sens à l'axe de la rotation imposée, conduit ici à des contraintes dans les ailes portantes par gauchissement.

En principe, les phénomènes traités ici se produisent aussi sur des turboréacteurs sans hélices. Dans ce cas, ce sont les éléments rotatifs de la turbine qui forment le gyroscope. Par suite de plus petit diamètre des rotors des turbines et malgré leurs vitesses de rotation plus élevées, les moments cinétiques sont nettement plus petits que ceux des hélices de sorte que les effets décrits ci-devant sont, en général, de faible importance pour des avions à turbo-réacteurs. Enfin les effets gyroscopiques disparaissent complètement sur des avions à réaction sans éléments tournants.

#### 4.5 La terre et les satellites

La terre tourne chaque jour une fois autour de son axe. Même si on ne peut pas la considérer comme un solide rigide, de nombreux faits géophysiques peuvent pourtant s'expliquer par des effets gyroscopiques. Comme sa vitesse de rotation est très lente, la déformation du corps de la terre ainsi que la mobilité des masses d'eau existantes à sa surface ont visiblement une réaction peu importante. Nous pouvons donc raisonner comme si la terre était un gyroscope avec un moment cinétique coïncidant approximativement avec l'axe de rotation (axe nord-sud).

Le gyroscope terrestre peut exécuter des mouvements de nutation et de précession. Les moments d'inertie de la terre autour de l'axe de rotation respectivement autour des axes transversaux sont peu différents l'un de l'autre, la terre étant pratiquement une sphère. D'après la formule (4) du chapitre 2.2, il en résulte que la fréquence de nutation  $\omega_n$  est de très près égale à la fréquence de rotation  $\omega$ . Cette affirmation n'est toutefois significative que pour un observateur qui considère les mouvements de la terre de "l'extérieur" (par ex. du soleil). Mais en tant qu'habitants de la terre, nous participons nous-mêmes à la rotation de la terre, de sorte que nous sommes principalement intéressés par le mouvement de l'axe de rotation par rapport au corps de la terre. Comme l'expérience décrite au chapitre 2.2 avec le disque de Maxwell l'a montré, la vitesse de déplacement de l'axe de rotation par rapport au gyroscope est dépendante des rapports des moments d'inertie. Avec un corps, de forme sphérique idéale, ayant des moments d'inertie identiques dans tous les sens, cette vitesse de déplacement devient nulle. Avec un corps de forme presque sphérique, comme tel est le cas effectivement avec la terre, elle est très petite. Des mesures ont indiqué que l'axe de la terre effectue une révolution suivant un cône de nutation en 430 jours. L'angle au sommet de ce cône est tellement petit, que la courbe d'intersection avec la surface de la terre est un cercle, entourant le pôle moyen, d'un diamètre d'environ 10 mètres seulement. Ces déplacements du pôle peuvent être perçus et mesurés par les observatoires astronomiques dans les variations périodiques très faibles de la latitude géographique. La durée de 430 jours est appelée **période de Chandler** d'après l'auteur de la découverte.

Nous observons aussi des précessions, donc des mouvements de déviation de la terre produits par des couples extérieurs. Les couples de précession sont engendrés par suite des forces d'attraction du soleil et de la lune qui s'ajoutent aux forces centrifuges dues à la rotation sur l'orbite. En principe, ces faits peuvent s'expliquer à partir du dessin de la fig. 41, sur laquelle on a représenté la terre comme un corps

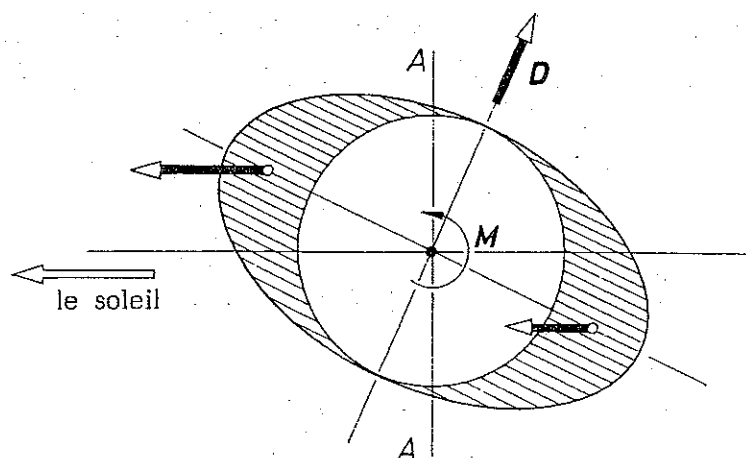


Fig. 41. Explication du mouvement de précession de la terre.

exagérément aplati. Avec une terre de forme sphérique idéale il ne se produirait pas de couple tournant. Mais dans le cas d'une terre aplatie, la partie du renflement de l'équateur, la plus proche du soleil, est attirée plus fortement, suivant la loi d'attraction des masses, que la partie éloignée du soleil. Il s'en suit un couple qui cherche à faire tourner la terre dans le sens de la flèche (en tait fin sur la figure). Le vecteur de ce couple est en position verticale par rapport au plan du dessin de la figure et est dirigé vers l'observateur. On en déduit que le mouvement de précession de la terre s'effectue de telle sorte que le vecteur moment cinétique  $D$  contourne l'axe dessiné A-A sur un cône de révolution - d'une manière semblable comme déjà décrite antérieurement (chapitre 2.5) pour le pendule gyroscopique. L'axe A-A est en position verticale sur le plan de l'orbite de la terre autour du soleil (écliptique). La durée de précession peut être calculée par la formule (3) (chapitre 2.1) à partir du moment cinétique de la terre, de l'aplatissement de la terre et de la grandeur de l'attraction des masses. Il faut environ 26.000 années pour parcourir une fois le cône de précession. En pratique, ce mouvement de précession a pour effet de faire déplacer le point désigné par équinoxe du printemps, défini par la ligne d'intersection du plan équatorial et de l'écliptique. Avec lui se déplacent aussi les images des étoiles de la constellation des animaux par rapport au cycle des saisons. Il faut environ 2.000 ans pour que les images de étoiles soient décalées d'un mois.

En réalité le mouvement de précession de la terre est plus compliqué qu'il n'a été décrit ici, car les influences du soleil et de la lune se superposent. Malgré la petite taille de la lune, le couple de précession qu'elle engendre est environ du double de celui engendré par le soleil, la lune étant beaucoup plus près de la terre.

Le couple de l'attraction des masses décrit ici a une influence sur le mouvement des satellites terrestres artificiels. On peut montrer que le couple a tendance à orienter les satellites tournant autour de la terre de telle sorte que l'axe de plus petit moment d'inertie principal est dirigé vers le centre d'attraction, donc vers le centre de la terre. Le satellite se comporte comme un pendule assujetti à la direction verticale. Mais pour le satellite tournant sur orbite la direction de la verticale se modifie en permanence. Il doit tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan orbital, pour que l'axe du plus petit moment d'inertie principal puisse continuer à se diriger vers le centre de la terre. Le satellite reçoit de cette façon un certain moment cinétique et se comporte en conséquence comme un gyroscope.

Nous ne pouvons rentrer ici dans les détails bien compliqués du concours des forces d'attraction, centrifuges et gyroscopiques. Toutefois, on peut en évoquer le résultat suivant: Sur la fig. 42 on a représenté trois satellites de forme différente parcourant une orbite circulaire (dessinée en traits interrompus) autour de la terre. Si ces satellites ne possèdent pas de vitesse de rotation propre complémentaire en dehors de celle de la rotation imposée provenant du mouvement de révolution, alors peu de configurations sont stables. Un satellite asymétrique (cas a: trois moments d'inertie

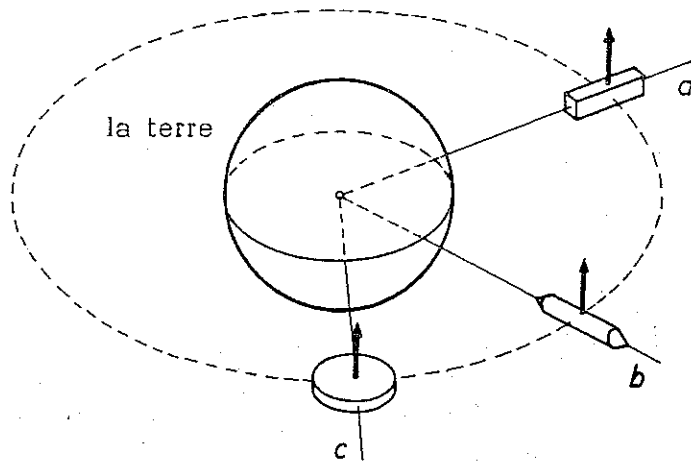


Fig. 42. Positions stables de satellites terrestres sur une orbite circulaire.

principaux différents) est en général uniquement stable, lorsque l'axe de son plus petit moment d'inertie principal est dirigé vers le centre d'attraction (direction statiquement stable) et que simultanément l'axe du plus grand moment d'inertie principal se trouve perpendiculaire au plan orbital (axe de rotation dynamiquement stable). Un satellite symétrique de forme allongée (cas b: l'axe de symétrie est axe du plus petit moment d'inertie principal) peut seulement effectuer une révolution stable si l'axe de symétrie est dirigé vers le centre d'attraction. Finalement un satellite de forme aplatie (cas c: l'axe de symétrie est axe du plus grand moment d'inertie principal) effectue une révolution stable si son axe de symétrie est perpendiculaire au plan orbital.

Ces résultats montrent qu'il existe encore moins de mouvements stables chez les satellites en rotation que sur les gyroscopes exempts de forces décrits dans le chapitre 3.2. Naturellement ces conditions se modifient si on donne au satellite un moment cinétique propre complémentaire ou si on le stabilise par un réglage artificiel de sa position.

## 5. LES APPAREILS GYROSCOPIQUES

Les applications techniques des phénomènes gyroscopiques sont devenues dans les dernières décennies de plus en plus nombreuses. Actuellement, des navires, des avions et des fusées sans appareils gyroscopiques seraient à peine imaginables. C'est grâce à ces appareils qu'ils ont la faculté de constater des déviations de cap, de déterminer des orientations et d'exécuter des manoeuvres avec une précision souvent étonnante qui force notre admiration, par exemple, avec les fusées porteuses de satellites artificiels.

A l'aide des gyroscopes on peut mesurer et régler les vitesses angulaires et les vitesses de rotation. Les gyroscopes constituent les éléments de construction les plus importants dans les appareils de mesures les plus élaborés, utilisés pour la détermination de position, donc dans la navigation. Enfin, on peut procéder à une stabilisation directe ou indirecte de corps en mouvement à l'aide des gyroscopes. Même dans l'amortissement de vibrations sur des installations de machine, le gyroscope trouve son application.

Le chapitre suivant va décrire la constitution et le principal mode d'application des plus importants appareils gyroscopiques. On pourra toujours simuler et représenter le fonctionnement des appareils par une expérience sur le gyroscope-modèle. Simultanément, on pourra montrer sur le modèle un certain nombre d'erreurs dues au principe de fonctionnement, permettant ainsi de déterminer les limites d'application des appareils. Conformément au but de cet ouvrage, nous nous limiterons, ici, également à décrire le côté qualitatif des phénomènes. Pour une étude quantitative, nous renvoyons de nouveau à la bibliographie.

Nous voulons encore attirer l'attention sur le point suivant: Les appareils décrits ci-après sont exclusivement basés sur l'emploi de gyroscopes classiques, donc d'un corps rigide en rotation rapide. Dans les derniers temps, la recherche s'est orientée vers l'étude des propriétés de liquides et de gaz en rotation et même d'électrons en rotation. Quelques unes des connaissances acquises par là peuvent être utilisées pour la construction d'appareils ayant des similitudes avec les gyroscopes. Ces gyroscopes désignés souvent par le nom "exotiques" ne seront pas traités ici.

### 5.1 Le gyroscope directionnel, un conservateur de cap

#### a) Le principe

Le fait qu'un gyroscope suspendu dégagé de toutes contraintes conserve la direction de son axe est utilisé dans le dénommé **gyroscope directionnel** pour indiquer les